Méthodes de réduction d'ordre pour un milieu poreux-élastique et couplage avec un système EDO

Thomas Saigre

dirigé by
Christophe Prud'homme

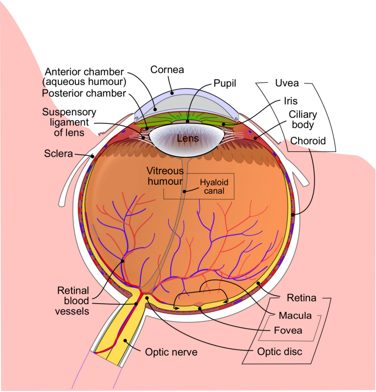
Cemosis – IRMA

26 août 2021

Table des matières

Contexte

- Avec sa connexion spéciale avec le cerveau, l'œil permet d'avoir accès à des données cliniques de façon non invasives pour permettre le diagnostic de certaines maladies, dont des maladies neuro-dégénératives.

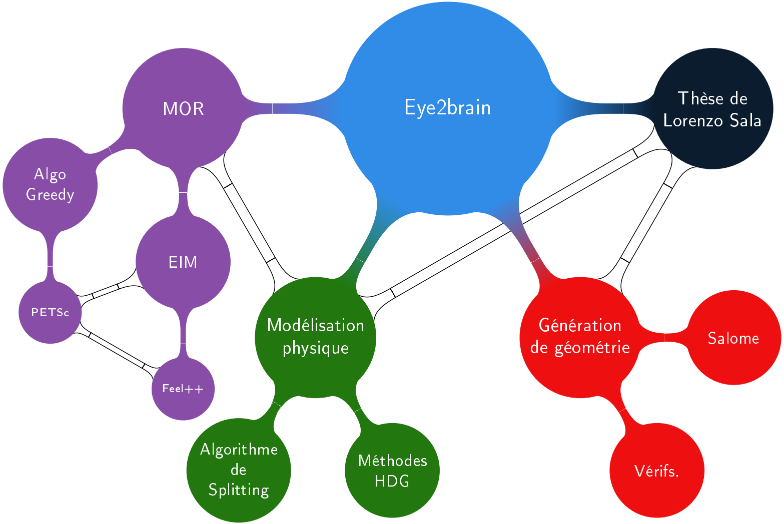


Rhcastilhos. And Jmarchn (de Wikipedia)

Contexte

- Projet *Eye2brain* porté par la plateforme Cemosis : développer un jumeau numérique de l'œil pour permettre une interprétation assistée par ordinateur de données cliniques
- Thèse de Lorenzo Sala[1] : Modélisation mathématique et simulation de flux sanguin oculaires et leurs interactions. Trois niveaux d'architectures mathématiques ont été développés pour l'OMVS

[1] Lorenzo Sala. "Mathematical modelling and simulation of ocular blood flows and their interactions". Theses. Université de Strasbourg, Sept. 2019. URL: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02284233.


Eye2brain
MOR
Thèse de Lorenzo Sala
Algo Greedy
EIM
PETSc
Feel++
Modélisation physique
Algorithme de Splitting
Méthodes HDG
Génération de géométrie
Salome
Vérifs.

Modélisation

Géométrie

- Génération automatique de géométrie avec SALOME à partir d'un fichier `STEP` :

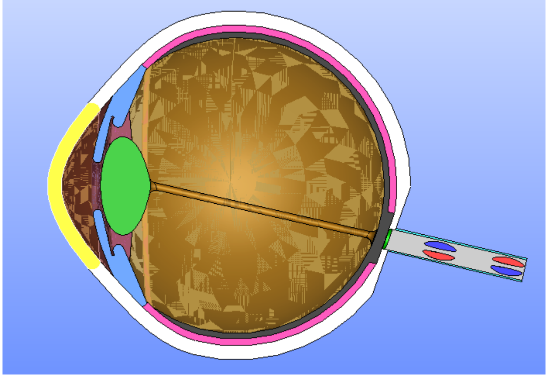


Figure 1: Geométrie de l'œil

Géométrie

- Génération automatique de géométrie avec SALOME à partir d'un fichier STEP :
  - Cornée
  - Iris
  - Sclera
  - Lentille
  - Ligament
  - Humeur acqueuse [Che21]
  - Humeur vitrée

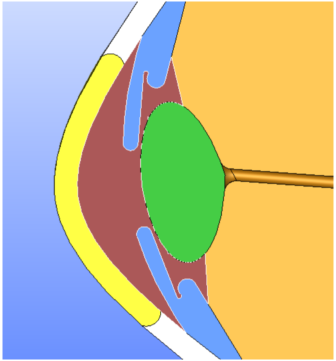


Figure 1: Avant de l'œil

Géométrie

- Génération automatique de géométrie avec SALOME à partir d'un fichier `STEP` :

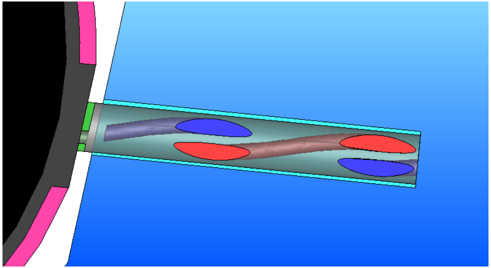
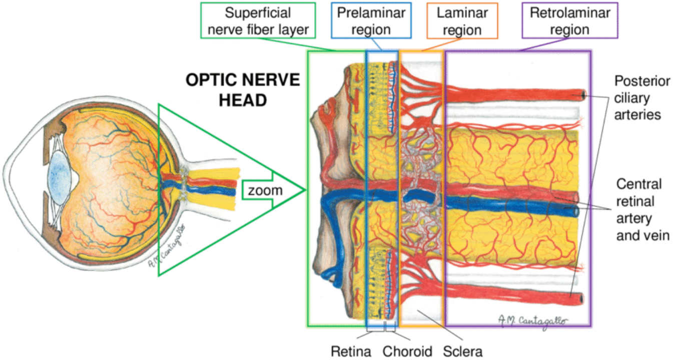


Figure 1: Arrière de l'œil

- Choroïde
- Rétine
- Lamina
- Artère
- Veine
- Nerf optique
- Pia

Géométrie

- Génération automatique de géométrie avec SALOME à partir d'un fichier `STEP` :



From [Pra+16]

Figure 1: Anatomie de l'arrière de l'œil et réseau valsculaire

Géométrie

- Génération automatique de géométrie avec SALOME à partir d'un fichier `STEP` :

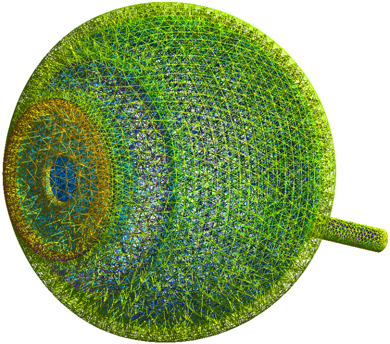
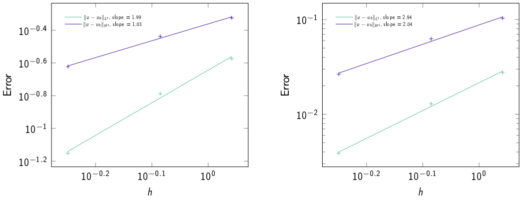


Figure 1: Maillage de la géométrie

Laplacian

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

- Application `feelpp_qs_laplacian_3d` : on configure la solution voulue u. f et g sont calculés par le programme.



(a) P1 (b) P2

Figure 2: Convergence of the errors, with $u(x,y,z) = \cos(\pi x)\sin(\pi y)\cos(\pi z)$

Validation

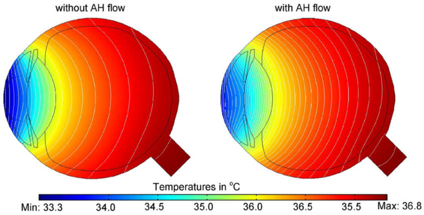
- Équation de la chaleur :

$$\rho_i C_{p,i} \frac{\partial T_i}{\partial t} = \nabla \cdot (k_i \nabla T_i) \tag{2}$$

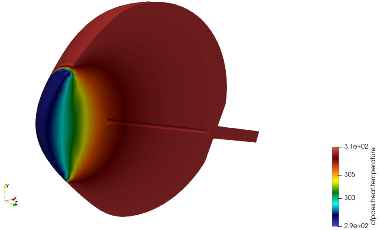
where :

- i indice du volume (Cornea, VitreousHumor...),
- T_i [K] temperature dans le volume volume i,
- t [s] temps. On condidère d'aborde un cas stationnaire, donc $\frac{\partial T_i}{\partial t} = 0$,
- k_i [$\mathrm{W\,m^{-1}} K^{-1}$] conductivité thermique, ρ_i [$\mathrm{kg\,m^{-3}}$] est la densité et $C_{p,i}$ [$\mathrm{J\,kg^{-1}} K^{-1}$] la chaleur spécifique.

Validation



(a) Résultats 2D[2]



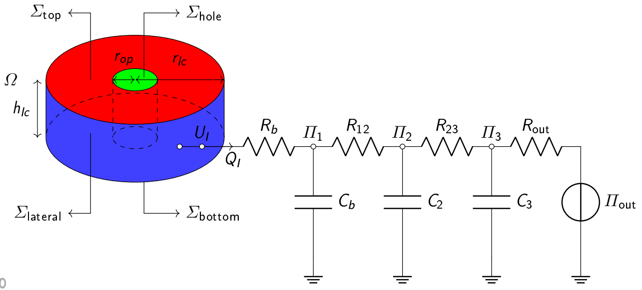
(b) Résultats 3D avec Feel++

Figure 3: Comparaison des résultats

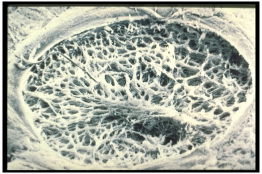
[2] Ean-Hin Ooi and Eddie Yin-Kwee Ng. "Simulation of aqueous humor hydrodynamics in human eye heat transfer". In: *Computers in Biology and Medicine* 38.2 (2008), pp. 252–262.

Modélisation physique

- Étude de modèles d'EDP ($3D+t$) couplée avec une EDO ($0D+t$)[3]



$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$



aao.org

Figure 4: Système couplé de la lamina cribosa

[3] Silvia Bertoluzza et al. "A HDG method for elliptic problems with integral boundary condition: Theory and Applications". 2021.

Modélisation physique

- Étude de modèles d'EDP (*3D+t*) couplée avec une EDO (*0D+t*)[3]

$$\begin{cases} \underline{j} + \mathcal{K}\nabla p = 0 & \text{dans } \Omega\times]0,T[\\ \dfrac{\partial p}{\partial t} + \nabla\cdot\underline{j} = f & \text{dans } \Omega\times]0,T[\end{cases} \qquad \frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}t} = \underline{\underline{A}}\Pi + \underbrace{\begin{bmatrix} Q_l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{terme source} \\ \text{dû au couplage}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Pi_{\text{out}}}{R_{\text{out}}} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{terme source} \\ \text{dû à } \Pi_{\text{out}}}} \tag{2}$$

Avec la condition d'interface (IBC)

$$\int_{\Sigma_{\text{lateral}}} \hat{\underline{j}}\cdot\underline{n} = Q_l \qquad p \text{ est constant } \Sigma_{\text{lateral}} : U_l = p \text{ sur } \Sigma_{\text{lateral}} \tag{3}$$

Et les conditions aux bords :

$$p = p_{\text{hole}} \text{ sur } \Sigma_{\text{hole}} \qquad \underline{j}\cdot\underline{n} = 0 \text{ sur } \Sigma_{\text{top}} \cup \Sigma_{\text{bottom}} \tag{4}$$

[3] Silvia Bertoluzza et al. "A HDG method for elliptic problems with integral boundary condition: Theory and Applications". 2021.

Functional Mock-Up Unit

Pour simuler un modèle 0D : OpenModelica ou Dymola pour créer un modèle `mo`, que l'on peut simuler avec Feel++.

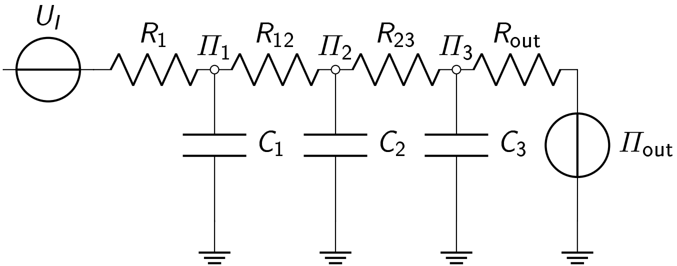


Figure 4: Circuit pour Dymola

Functional Mock-Up Unit

Pour simuler un modèle 0D : OpenModelica ou Dymola pour créer un modèle `mo`, que l'on peut simuler avec Feel++.

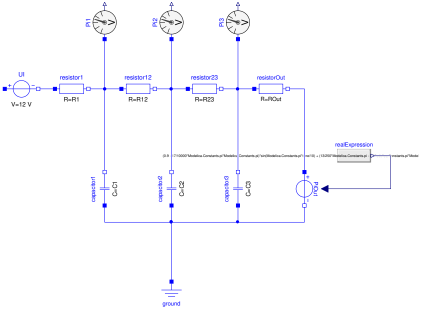


Figure 4: Circuit pour Dymola

Équations de Darcy avec IBC

Équations décrivant le mouvement dans un milieu poreux.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, avec $d \in \{2, 3\}$. On note Γ la frontière de Ω, partitionée en trois sous-ensembles disjoints : Γ_D, Γ_N et Γ_I. Le problème à résoudre est : trouver $\underline{j} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ et $p \in L^2(\Omega)$ tels que :

$$\underline{j} + \mathcal{K} \cdot \nabla p = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{5a}$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot \underline{j} = f \quad \text{in } \Omega \tag{5b}$$

Équations de Darcy avec IBC

Équations décrivant le mouvement dans un milieu poreux.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, avec $d \in \{2,3\}$. On note Γ la frontière de Ω, partitionée en trois sous-ensembles disjoints : Γ_D, Γ_N et Γ_I. Le problème à résoudre est : trouver $\underline{j} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ et $p \in L^2(\Omega)$ tels que :

$$\underline{j} + \mathcal{K} \cdot \nabla p = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{5a}$$

$$\partial_t p + \nabla \cdot \underline{j} = f \quad \text{in } \Omega \tag{5b}$$

avec ces conditions aux bords :

- $p = g_D$ sur Γ_D
- $\underline{j} \cdot \underline{n} = g_N$ sur Γ_N
- $\int_{\Gamma_I} \underline{j} \cdot \underline{n} = I_{\text{target}}$ sur Γ_I
- $p(\underline{X}) = p$ sur Γ_I

où I_{target} est une constante. La solution p est constante sur Γ_I

Test linéaire

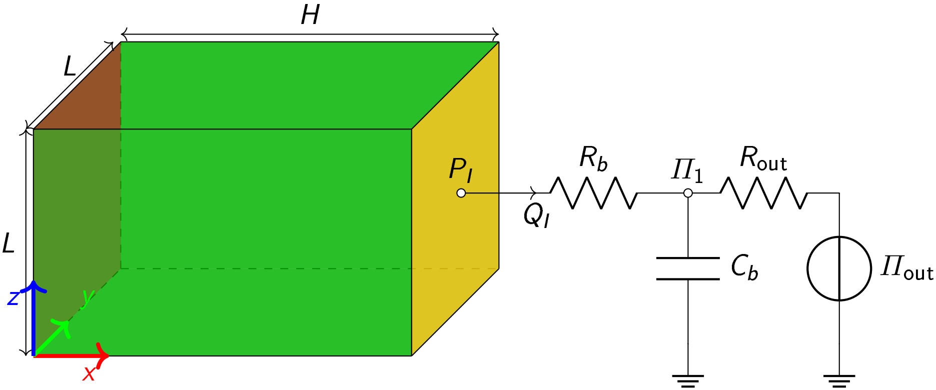


Figure 5: Simple 3D - 0D model

Test linéaire

- $\Omega = \left\{X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x \in [0, H] \text{ et } y, z \in [0, L], \right\}$
- $\Gamma_D = \Omega \cap \{x = 0\}$
- $\Gamma_I = \Omega \cap \{x = H\}$
- $\Gamma_N = \Omega \cap (\{y = 0\} \cup \{y = L\} \cup \{z = 0\} \cup \{z = L\})$

Test linéaire

On pose $p(\underline{X}, t) = \alpha + \beta x t$ for $\underline{X} = (x, y, z) \in \Omega$ and $t \geqslant 0$, et $\mathcal{K} = kI$. L'équation de Darcy equation (see 5)

$$\frac{1}{M}\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = f \qquad \underline{j} + k\nabla p = \underline{0} \tag{6}$$

donne :

$$\underline{j} = -k \begin{bmatrix} \beta t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad f = \beta x \tag{7}$$

Test linéaire

Conditions aux bords :

- Sur Γ_N, $\underline{j} \cdot \underline{n} = 0$, car $\underline{n} = [0,0,-1]^T$, $[0,1,0]^T$, $[0,0,1]^T$, $[0,-1,0]^T$ dépendant de la face de Γ_N,
- Sur Γ_G, $p = \alpha$,
- Sur Γ_I, $\int_{\Gamma_I} \underline{j} \cdot \underline{n} = \int_{\Gamma_I} \begin{bmatrix} -\beta t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -L^2 k \beta t =: Q_I$; et $p|_{\Gamma_I} = \alpha + \beta H t =: U_I$

Comme $Q_I(t) = \dfrac{U_I - \Pi_1}{R_b}$, on obtient $\Pi_1 = P_I - Q_I = \alpha + \beta(H + R_b L^2 k)t$. Avec la loi de Kirchhoff sur le nœud Π_1, on trouve :

$$\Pi_{\text{out}} = \alpha + \beta \left[Ht + L^2 kt(R_b - R_{\text{out}}) - C_b R_{\text{out}}(H + R_b L^2 k) \right]$$

Résultats de la toolbox Feel++

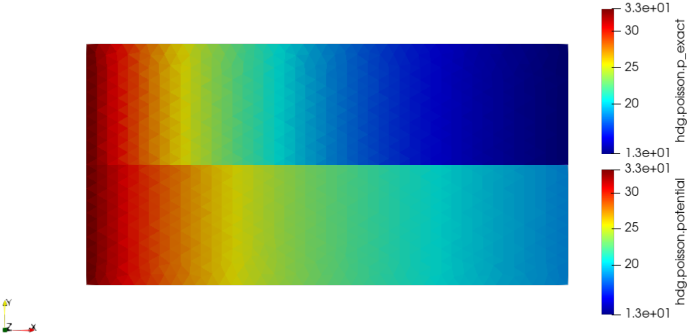


Figure 5: Comparaison du potential

Discrétisation spatiale : Méthode HDG

Hybridizable Discontinuous Galerkin[4]

Definition

La méthode *HDG* est une méthode éléments finis où les espaces de fonctions considérés ne sont pas continus (d'un élément à l'autre).

- Cela implique un nombre de degrés de liberté plus grand que dans les méthodes EF usuelles
- On impose faiblement la continuité de la solution sur les bords des éléments du maillage

[4] Silvia Bertoluzza et al. "A HDG method for elliptic problems with integral boundary condition: Theory and Applications". 2021.

Équation de Darcy (stationnaire pour simplifier)

On part de cette équation du second ordre :

$$-\nabla \cdot (\mathcal{K}\nabla p) = f \qquad \text{sur } \Omega \tag{6}$$

On pose $\underline{j} = -\mathcal{K}\nabla p$, ce qui donne ce système d'équations :

Équation de Darcy (stationnaire pour simplifier)

On part de cette équation du second ordre :

$$-\nabla \cdot (\mathcal{K} \nabla p) = f \qquad \text{sur } \Omega \tag{6}$$

On pose $\underline{j} = -\mathcal{K}\nabla p$, ce qui donne ce système d'équations :

$$\begin{cases} \underline{j} + \mathcal{K}\nabla p = 0 & \text{sur } \Omega \\ \nabla \cdot \underline{j} = f & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{7}$$

d'inconnues p et $\underline{j}$.

Formulation variationnelle

(en intégrant le système précédent, puis en faisant une intégration par parties)

Soit $\overline{\varphi} \in H^{1/2}(\Omega)$ telle que $\overline{\varphi}|_{\Gamma_D} = 0$ et $\overline{\varphi}|_{\Gamma_I} = 1$.
On considère le problème variationnel suivant :

trouver $\underline{j} \in H(\mathrm{div}, \Omega), p \in L^2(\Omega)$ et $\widehat{p} \in \mathrm{span}\,\langle\overline{\varphi}\rangle \oplus H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)$, tel que
$\forall \underline{v} \in H(\mathrm{div}, \Omega), w \in L^2(\Omega)$ et $\mu \in \mathrm{span}\,\langle\overline{\varphi}\rangle \oplus H^{1/2}_{00}(\Gamma_N)$, on ait :

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{K}^{-1}\underline{j}, \underline{v})_\Omega - (p, \nabla \cdot \underline{v})_\Omega + \langle \widehat{p}, \underline{v} \cdot \underline{n} \rangle_\Gamma &= 0 \\
(\nabla \cdot \underline{j}, w)_\Omega &= (f, w)_\Omega \\
\langle \underline{j} \cdot \underline{n}, \mu \rangle_{\Gamma_N \cup \Gamma_I} &= \langle g_N, \mu \rangle_{\Gamma_N} + I_{\mathrm{target}} |\Gamma_I|^{-1} \langle \mu, 1 \rangle_{\Gamma_I} \\
\langle \widehat{p}, \mu \rangle_{\Gamma_D} &= \langle g_D, \mu \rangle_{\Gamma_D}
\end{aligned}
$$

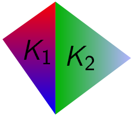
Espaces de fonctions

On introduit ces espaces de fonctions :

- $\underline{V}_h = \prod_{K \in \mathcal{T}_h} \underline{V}(K)$
- $W_h = \prod_{K \in \mathcal{T}_h} W(K)$

avec $\underline{V}_k(K) = (\mathbb{P}_k(K))^d$ et $W_k(K) = \mathbb{P}_k(K)$

On voit que les fonctions de $\underline{V}_h$ et W_h ne sont pas forcément continues d'un élément à l'autre.

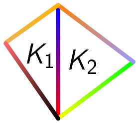


Espaces de fonctions

On introduit ces espaces de fonctions :

- $\widetilde{M}_h = \left\{\mu \in L^2(\mathcal{F}_h) \middle| \mu|_F \in \mathbb{P}_k(F)\ \forall F \in \mathcal{F}_h^0 \cup \mathcal{F}_h^{\Gamma_N}, \mu|_{\Gamma_D \cup \Gamma_I} = 0\right\}$
- $M_h^* = \{\mu \in L^2(\mathcal{F}_h) | \mu|_{\Gamma_I} \in \mathbb{R}\ (\mu \text{ est constant}), \mu|_{\mathcal{F}_h \setminus \Gamma_I} = 0\}$ (on a $\dim M_h^* = 1$)
- $M_h = M_h^* \oplus \widetilde{M}_h$

Les fonctions de M_h sont discontinues sur les sommets de $\mathcal{F}_h \setminus \mathcal{F}_h^{\Gamma_I}$, et univaluées sur les arêtes.



Ces fonctions servent de connecteur entre les éléments adjecents.

Formulation variationnelle discrète

On définit le *flux numérique normal* sur ∂K par :

$$\widehat{\underline{j}}_K^{\partial K} \cdot \underline{n}_{\partial K} = \underline{j}_h^K|_{\partial K} \cdot \underline{n}_{\partial K} + \tau_{\partial K} \left(p_h^K|_{\partial K} - \widehat{p}_h|_{\partial K} \right)$$

($\tau_{\partial K} \geqslant 0$ paramètre de stabilisation, qui peut dépndre de la face $F \in \partial K$)
Trouver $\underline{j}_h \in \underline{V}_h$, $p_h \in W_h$ et $\widehat{p}_h \in M_h$ tels que $\forall \underline{v}_h \in \underline{V}_h, \forall w_h \in W_h, \forall \mu_h \in M_h$:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\left(\mathcal{K}^{-1} \underline{j}_h^K, \underline{v}_h^K \right)_K - \left(p_h^K, \nabla \cdot \underline{v}_h^K \right)_K + \left\langle \widehat{p}_k^{\partial K}, \underline{v}_h^K \cdot \underline{n}_{\partial K} \right\rangle_{\partial K} \right] = 0$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[- \left(\underline{j}_h^K, \nabla w_h^K \right)_K + \left\langle \widehat{\underline{j}}_h^{\partial K} \cdot \underline{n}_{\partial K}, w_h^K \right\rangle_{\partial K} \right] = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(f, w_h^K \right)_K$$

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\langle \widehat{\underline{j}}_h^{\partial K} \cdot \underline{n}_{\partial K}, \mu_h \right\rangle_{\partial K} = \langle g_N, \mu_h \rangle_{\Gamma_N} + I_{\text{target}} \frac{1}{|\Gamma_I|} \langle \mu_h, 1 \rangle_{\Gamma_I}$$

Stratégie de résolution

- $\underline{j}_h$ et p_h sont les approximations de $\underline{j}$ et p à l'intérieur des éléments $K \in \mathcal{T}_h$, et $\widehat{p}_h^K$ est l'approximation de la trace de p_h sur les faces de $\mathcal{F}_h$
- *Condensation statique* : les équations discrètes sont vraies à l'intérieur de chaque $K \in \mathcal{T}_h$ et peuvent être résolues sur chaque K pour éliminer $\underline{j}_h^K$ et p_h^K en faveur de $\widehat{p}_h^{\partial K}$.
- En combinant cette procédure à la définition du flux numérique normal $\widehat{\underline{j}}_h^{\partial K}$, on peut exprimer $\widehat{\underline{j}}_h^{\partial K}$ en fonction de $\widehat{p}_h^{\partial K}$ uniquement.

Discrétisation temporelle : Méthode de splitting

Algorithme de splitting

- Un couplage 3D – 0D peut introduire des instablités numériques
- On va étudier l'opérateur de splitting[5]
  - La différence d'échelle ne va poser aucun problème
  - La formulation HDG supporte la condition intégrale au bord (IBC) sans aucune sous-itération
- On aura un couplage naturel entre le modèle 3D et le modèle 0D.

[5] Silvia Bertoluzza et al. "A HDG method for elliptic problems with integral boundary condition: Theory and Applications". 2021.

Opérateur splitting

- Semi-discrétisation en temps pour maintenir la flexibilité lors de l'application de la méthode HDG dans le problème temporel
- On pose $t^n = n\Delta t$ pour $n \leqslant 0$, et on note φ^n la valeur de $\varphi(t^n)$.

À partir de p^n et $\underline{\Pi}^n$, pour passer de t^n à t^{n+1}, on résoud deux étapes :

Opérateur splitting : Étape 1

Trouver $\underline{j}$, p et $\underline{\Pi}$ tels que :

$$\underline{j} + k_p \nabla p = \underline{0} \qquad \text{dans } \Omega\times]t^n, t^{n+1}[\tag{8a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = f \qquad \text{dans } \Omega\times]t^n, t^{n+1}[\tag{8b}$$

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\Pi}}{\mathrm{d}t} = \underline{b} \qquad \text{dans } \Omega\times]t^n, t^{n+1}[\tag{8c}$$

avec les conditions aux bords $p = p_{\text{hole}}$ sur Σ_{hole} et $\underline{j} \cdot \underline{n} = 0$ sur $\Sigma_{\text{top}} \cup \Sigma_{\text{bottom}}$;
les conditions à l'interface $\displaystyle\int_{\Sigma_{\text{lateral}}} \underline{j} \cdot \underline{n} = Q_I$, p est constant sur Σ_{lateral} et $U_I = p$ sur Σ_{lateral}
et les conditions initiales $p(t^n) = p^n$, $\underline{\Pi}(t^n) = \underline{\Pi}^n$.
On pose alors $p^{n+\frac{1}{2}} = p(t^{n+1})$, $\underline{\Pi}^{n+\frac{1}{2}} = \underline{\Pi}(t^{n+1})$ et $\underline{j}^{n+\frac{1}{2}} = \underline{j}(t^{n+1})$.

Opérateur splitting : Étape 2

Trouver p et $\underline{\Pi}$ tels que :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \qquad \text{dans } \Omega \times]t^n, t^{n+1}[\tag{8a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\Pi}}{\mathrm{d}t} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\Pi} + \underline{s} \qquad \text{dans }]t, t^{n+1}[\tag{8b}$$

avec les conditions initiales $p(t^n) = p^{n+\frac{1}{2}}$ et $\underline{\Pi}(t^n) = \underline{\Pi}^{n+\frac{1}{2}}$.
On pose alors $p^{n+1} = p(t^{n+1})$, $\underline{\Pi}^{n+1} = \underline{\Pi}(t^{n+1})$ et $\underline{j}^{n+1} = \underline{j}(t^{n+1})$.

Stabilité

Théorème : stabilité[6]

On considère le modèle de couplage 3D – 0D, auquel on ajoute certaines hypothèses. Alors l'algorithme donné par les étapes 1 et 2 est inconditionnellement stable.

Idée de preuve : Si $\mathcal{E}_1^n$ désigne l'énergie totale du système à l'étape 1 au temps t^n (idem $\mathcal{E}_2^n$), alors on montre :

1. $\mathcal{E}_1^{n+\frac{1}{2}} \leqslant \mathcal{E}_1^n$
2. $\mathcal{E}_2^{n+1} \leqslant \mathcal{E}_2^{n+\frac{1}{2}}$
3. Comme la condition initiale de l'étape 2 coïncide avec la solution finale de l'étape 1, il en résulte que : $\mathcal{E}_2^{n+1} \leqslant \mathcal{E}_1^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{E}_2^{n+\frac{1}{2}} \leqslant \mathcal{E}_1^n$

D'où la stabilité inconditionnelle.

[6] Lorenzo Sala. "Mathematical modelling and simulation of ocular blood flows and their interactions". Theses. Université de Strasbourg, Sept. 2019. URL: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02284233.

Ordre de convergence[7]

Ordre de convergence

Cet algorithme converge à l'ordre 1 en temps.

Algorithme d'ordre 2

Il est possible d'obtenir un algorithme d'ordre 2 en temps, en utilisant une forte symétrisation et en utilisant des algorithmes des discretisation d'ordre au moins 2 en temps

[7] Roland Glowinski. "Finite element methods for incompressible viscous flow". In: *Numerical Methods for Fluids (Part 3)*. Vol. 9. Handbook of Numerical Analysis. Elsevier, 2003, pp. 3–1176. DOI: https://doi.org/10.1016/S1570-8659(03)09003-3. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1570865903090033.

Reduced Order Methods

Modèle thermique : thermal fin

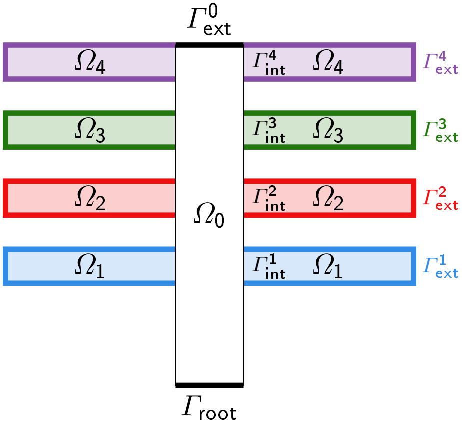


Figure 6: Géométrie du thermal fin

Modèle thermique : thermal fin

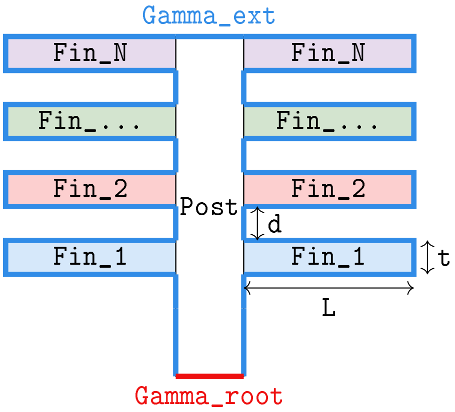
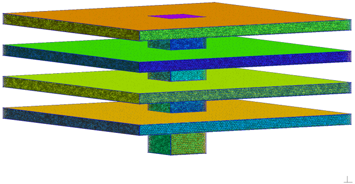
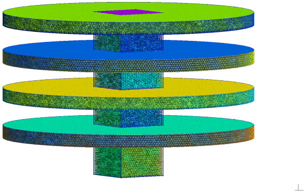


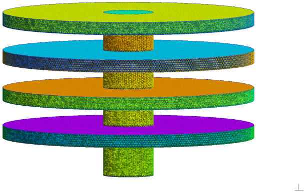
Figure 6: Géométrie avec différents paramètres

Modèle thermique : thermal fin

Génération automatique des fichiers de configuration Feel++ avec *liquid*







Empirical Interpolation Method

- On cherche à résoudre un problème du type : *Trouver* $u(\underline{\mu}) \in V$ *tel que* $\forall v \in V$, $a(u(\underline{\mu}), v) = f(v, \underline{\mu})$, avec le paramètre $\underline{\mu} \in D \subset \mathbb{R}^d$.

[8] Romain Hild. "Optimization and control of high fields magnets". Theses. Université de Strasbourg, Nov. 2020. URL: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03025312.

Empirical Interpolation Method

- On cherche à résoudre un problème du type : *Trouver* $u(\underline{\mu}) \in V$ *tel que* $\forall v \in V$, $a(u(\underline{\mu}), v) = f(v, \underline{\mu})$, avec le paramètre $\underline{\mu} \in D \subset \mathbb{R}^d$.
- On décompose $a(u, v; \underline{\mu}) = \sum_{q=0}^{Q} \theta^q(\underline{\mu}) a^q(u, v)$, avec θ^q en fonction du paramètre $\underline{\mu}$, et a^q independant de $\underline{\mu}$. Mais cette décomposition n'est pas tout le temps possible.

[8] Romain Hild. "Optimization and control of high fields magnets". Theses. Université de Strasbourg, Nov. 2020. URL: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03025312.

Empirical Interpolation Method

- On cherche à résoudre un problème du type : *Trouver* $u(\underline{\mu}) \in V$ *tel que* $\forall v \in V$, $a(u(\underline{\mu}), v) = f(v, \underline{\mu})$, avec le paramètre $\underline{\mu} \in D \subset \mathbb{R}^d$.
- On décompose $a(u, v; \underline{\mu}) = \sum_{q=0}^{Q} \theta^q(\underline{\mu}) a^q(u, v)$, avec θ^q en fonction du paramètre $\underline{\mu}$, et a^q independant de $\underline{\mu}$. Mais cette décomposition n'est pas tout le temps possible.
- On peut utiliser la *Empirical Interpolation Method* (EIM)[8], qui consitste à approximer une fonction paramétrisée par une somme de termes affines :

$$g(x, \underline{\mu}) \approx g_M(x, \underline{\mu}) = \sum_{m=1}^{M} \theta_{g,M}^m(\underline{\mu}) q_m(x) \tag{9}$$

[8] Romain Hild. "Optimization and control of high fields magnets". Theses. Université de Strasbourg, Nov. 2020. URL: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03025312.

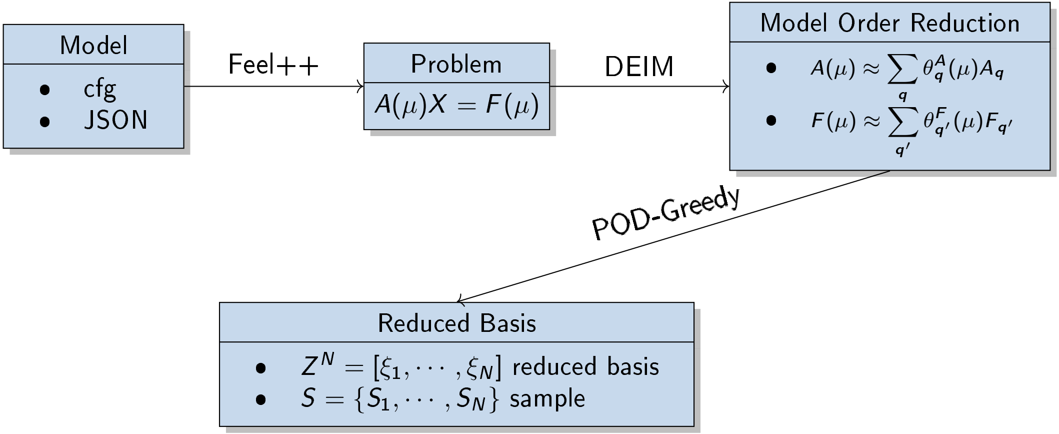


Figure 6: Pipeline for Model Order Reduction

A posteriori error estimation

- On a ces décompositions :

$$A(\underline{\mu}) = \sum_{q=1}^{Q_a} \beta_A^q A^q \qquad F(\underline{\mu}) = \sum_{p=1}^{Q_f} \beta_F^p F^p \tag{10}$$

A posteriori error estimation

- On a ces décompositions :

$$A(\underline{\mu}) = \sum_{q=1}^{Q_a} \beta_A^q A^q \qquad F(\underline{\mu}) = \sum_{p=1}^{Q_f} \beta_F^p F^p \tag{10}$$

- L'erreur vérifie :

$$(\widehat{e}(\underline{\mu}), v)_X = \sum_p \beta_F^p(\underline{\mu}) f^q(v) - \sum_q \sum_n \beta_A^q(\underline{\mu}) u_N^n(\underline{\mu}) a^q(\xi^n, v) \quad \forall v \in X \tag{11}$$

A posteriori error estimation

- On a ces décompositions :

$$A(\underline{\mu}) = \sum_{q=1}^{Q_a} \beta_A^q A^q \qquad F(\underline{\mu}) = \sum_{p=1}^{Q_f} \beta_F^p F^p \tag{10}$$

- L'erreur vérifie :

$$(\widehat{e}(\underline{\mu}), v)_X = \sum_p \beta_F^p(\underline{\mu}) f^q(v) - \sum_q \sum_n \beta_A^q(\underline{\mu}) u_N^n(\underline{\mu}) a^q(\xi^n, v) \quad \forall v \in X \tag{11}$$

- Donc :

$$\begin{aligned} \|\widehat{e}(\underline{\mu})\|_X^2 = & \sum_p \sum_{p'} \beta_F^p \beta_F^{p'} (\mathcal{S}^p, \mathcal{S}^{p'})_X + 2 \sum_p \sum_q \sum_n \beta_F^p \beta_A^q u_N^n (\mathcal{S}^p, \mathcal{L}^{n,q})_X \\ & + \sum_q \sum_n \sum_{q'} \sum_{n'} \beta_A^q \beta_A^{q'} u_N^n u_N^{n'} (\mathcal{L}^{n',q'}, \mathcal{L}^{n,q})_X \end{aligned} \tag{12}$$

Algorithme Greedy

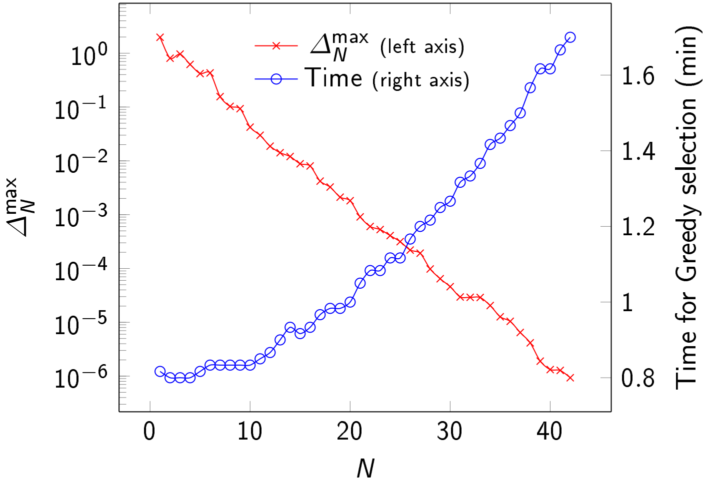
Algorithme 1 : Greedy algorithm

Input : $\mu_0 \in D$ et $\Xi_{\text{train}} \subset D$
$S \leftarrow [\mu_0]$
tant que $\Delta_N^{max} > \varepsilon$ **faire**
  $u(\mu^\star) \leftarrow$ solution FE solution, avec S comme échantillon pour générer les BR
  $W_N \leftarrow \{\xi = u(m^\star)\} \cup W_{N-1}$
  $\mu^\star \leftarrow \arg\max_{\mu \in \Xi_{\text{train}}} \Delta_N(\mu)$ (and $\Delta_N^{\text{max}} \leftarrow \max_{\mu \in \Xi_{\text{train}}} \Delta_N(\mu)$)
  Ajouter $\mu^\star$ to S
fin
Output : sample S, base réduite W

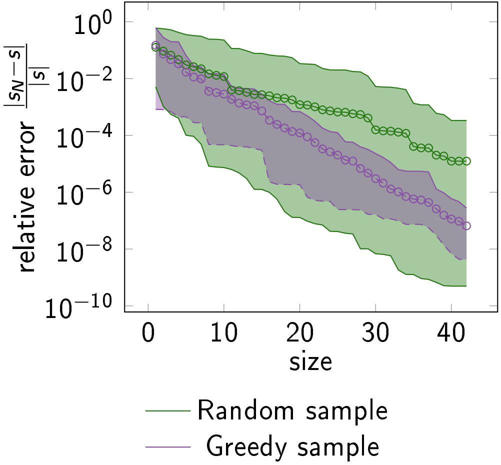
Aspects d'implémentation

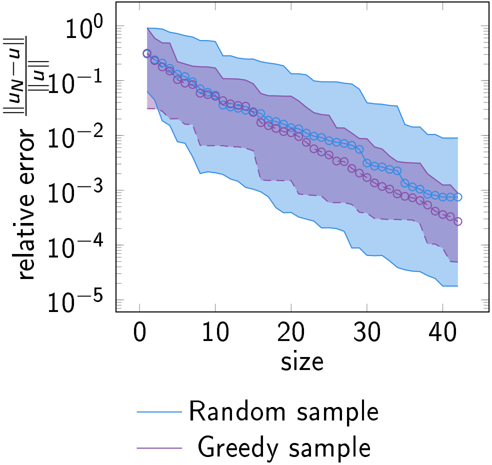
- Utilisation des vecteurs et matrices `PETSc` pour les calculs offline, utilisés dans Feel++.
- Modules `PETSc4Py` pour utiliser ces objets dans Python.
- Module NumPy pour les calculs online.

Résultats : Temps d'exécution



Résultats : Erreurs relatives





Conclusion et perspectives

- Analyse de sensibilité à partir des modèles réduits pour calculer les indices de Sobol
- Un travail simillaire a déjà été réalisé sur el modèel 0D, sans utiliser de bases réduites[9]
- Exemple de paramètres :
  - Physiologiques : pression sanguine, propriété physique des tissus
  - Géométrique : taille des certaines parties, forme générale de l'œil
- Le but est de mettre en place des modèle plus précis et plus efficaces

[9] Christophe Prud'homme, Lorenzo Sala, and Marcela Szopos. "Uncertainty propagation and sensitivity analysis: results from the Ocular Mathematical Virtual Simulator". In: *Mathematical Biosciences and Engineering* 18.3 (2021), pp. 2010–2032. ISSN: 1551-0018. DOI: 10.3934/mbe.2021105.

Bibliography I

Silvia Bertoluzza et al. "A HDG method for elliptic problems with integral boundary condition: Theory and Applications". 2021.

Lilian Cheraifi. Private Communication. 2021.

Roland Glowinski. "Finite element methods for incompressible viscous flow". In: *Numerical Methods for Fluids (Part 3)*. Vol. 9. Handbook of Numerical Analysis. Elsevier, 2003, pp. 3–1176. DOI: https://doi.org/10.1016/S1570-8659(03)09003-3. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1570865903090033.

Romain Hild. "Optimization and control of high fields magnets". Theses. Université de Strasbourg, Nov. 2020. URL: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03025312.

Bibliography II

Ean-Hin Ooi and Eddie Yin-Kwee Ng. "Simulation of aqueous humor hydrodynamics in human eye heat transfer". In: *Computers in Biology and Medicine* 38.2 (2008), pp. 252–262.

Daniele Prada et al. "Autoregulation and neurovascular coupling in the optic nerve head". In: *Survey of Ophthalmology* 61.2 (2016), pp. 164–186. ISSN: 0039-6257. DOI: https://doi.org/10.1016/j.survophthal.2015.10.004. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0039625715001824.

Christophe Prud'homme, Lorenzo Sala, and Marcela Szopos. "Uncertainty propagation and sensitivity analysis: results from the Ocular Mathematical Virtual Simulator". In: *Mathematical Biosciences and Engineering* 18.3 (2021), pp. 2010–2032. ISSN: 1551-0018. DOI: 10.3934/mbe.2021105.

Bibliography III

Lorenzo Sala. "Mathematical modelling and simulation of ocular blood flows and their interactions". Theses. Université de Strasbourg, Sept. 2019. URL: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02284233.