Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire

Roussel Desmond Nzoyem

Pr. Stéphane Labbé
Pr. Christophe Prud'homme

Sorbonne Université
Laboratoire Jacques-Louis Lions

Soutenance de fin de stage
26 août 2021

Sommaire

Motivation

Enjeux écologiques

- Rôle crucial de la zone polaire pour le climat face au réchauffement climatique (SASIP)
- Prévisions climatiques à échelle nature

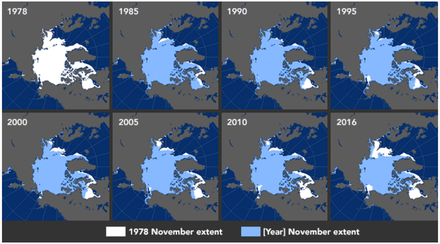


Figure – Évolution du gel saisonnier de l'Arctique (NASA Earth Observatory, 2016)

Motivation

Enjeux écologiques

- Rôle crucial de la zone polaire pour le climat face au réchauffement climatique (SASIP)
- Prévisions climatiques à échelle nature

Enjeux industriels

- Ouverture des routes maritimes pour l'exploitation des hydrocarbures
- Étude de l'interaction stations offshores / glace

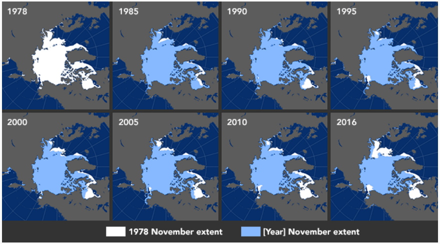


Figure – Évolution du gel saisonnier de l'Arctique (NASA Earth Observatory, 2016)

Figure – Un bateau industriel dans la MIZ (O Globo, 2012)

Motivation

Enjeux écologiques

- Rôle crucial de la zone polaire pour le climat face au réchauffement climatique (SASIP)
- Prévisions climatiques à échelle nature

Enjeux industriels

- Ouverture des routes maritimes pour l'exploitation des hydrocarbures
- Étude de l'interaction stations offshores / glace

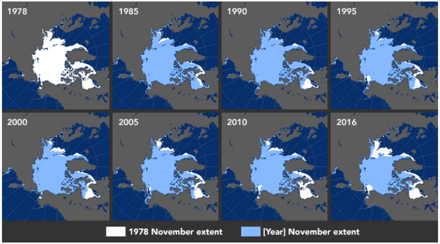


Figure – Évolution du gel saisonnier de l'Arctique (NASA Earth Observatory, 2016)

Figure – Un bateau industriel dans la MIZ (O Globo, 2012)

Il est donc urgent de prédire l'évolution de la banquise et de la MIZ (au moins) à court terme !

Objectifs

Objectifs généraux

- Comprendre le modèle de rupture de Griffith ;
- Comprendre le passage micro/macro de la percussion ;
- Intégrer le modèle dans un code de calcul à l'échelle des floes de glace.

Objectifs

Objectifs généraux

- Comprendre le modèle de rupture de Griffith ;
- Comprendre le passage micro/macro de la percussion ;
- Intégrer le modèle dans un code de calcul à l'échelle des floes de glace.

Objectifs

Objectifs généraux

- Comprendre le modèle de rupture de Griffith ;
- Comprendre le passage micro/macro de la percussion ;
- Intégrer le modèle dans un code de calcul à l'échelle des floes de glace.

Objectifs

Objectifs généraux

- Comprendre le modèle de rupture de Griffith ;
- Comprendre le passage micro/macro de la percussion ;
- Intégrer le modèle dans un code de calcul à l'échelle des floes de glace.

Objectifs intermédiaires

1. Prise en main de la notion de Γ-convergence ;
2. Lecture des travaux précédents :
   - M. Rabatel, S. Labbé, et J. Weiss : Dynamics of an assembly of rigid ice floes (2015) ;
   - Matthias Rabatel : Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides (2015) ;
   - Dimitri Balasoiu : Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace (2020).
3. Modélisation et simulation du déplacement des nœuds d'un floe isolé :
   - en 1D ;
   - en 2D ;
4. Introduction de la percussion et de la fracture dans le code préexistant.

Cinétique du floe

Les équations de Newton-Euler :

$$\begin{cases} M_i \dfrac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{G}}_i(t)}{\mathrm{d}t} & = \mathbf{F}_i, \\ \mathcal{I}_i \dfrac{\mathrm{d}\dot{\theta}_i(t)}{\mathrm{d}t} & = \mathfrak{M}_i, \end{cases} \tag{1}$$

où pour le floe Ω_i :

- M_i : masse du floe ;
- $\mathbf{F}_i$: somme des forces par unité de volume ;
- $\mathcal{I}_i$: moment d'inertie ;
- $\mathfrak{M}_i$: moment dynamique en G.

Le système (1) se réécrit sous la forme :

$$\mathcal{M}_i \frac{\mathrm{d}W_i(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{H}_i(t),$$

avec

$$\mathcal{M}_i = \begin{pmatrix} M_i & 0 & 0 \\ 0 & M_i & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_i \end{pmatrix}, \quad W_i(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{G}}(t) \\ \dot{\theta}_i(t) \end{pmatrix}, \text{ et } \quad \mathcal{H}_i(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_i(t) \\ \mathfrak{M}_i(t) \end{pmatrix}.$$

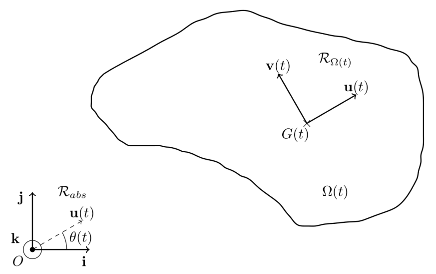


Figure – Repères abosolu et local pour un floe (Rabatel, 2015)

Interaction entre les floes

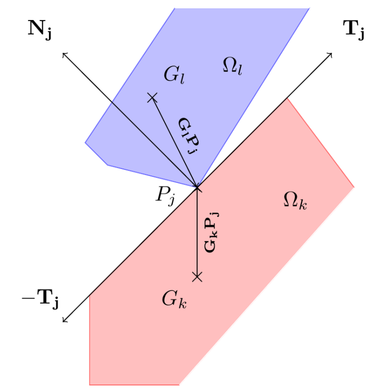


Figure – Interaction entre deux floes Ω_k et Ω_l au point P_j (Rabatel, 2015)

Deux conditions à respecter :

1. **Condition unilatérale de Signorini** : afin de décrire la condition de non-interpénétration :

> *S'il y a contact, alors la réaction est strictement positive et l'accélération relative nulle, et s'il n'y a pas contact, alors l'accélération relative est strictement positive et la réaction nulle.*

Interaction entre les floes

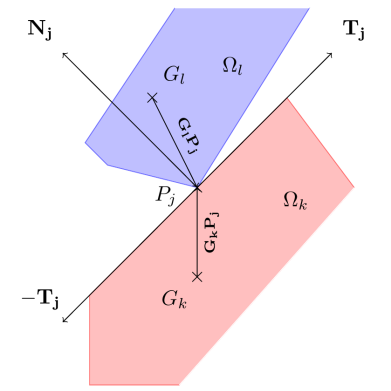


Figure – Interaction entre deux floes Ω_k et Ω_l au point P_j (Rabatel, 2015)

Deux conditions à respecter :

1. **Condition unilatérale de Signorini** : afin de décrire la condition de non-interpénétration :

   > *S'il y a contact, alors la réaction est strictement positive et l'accélération relative nulle, et s'il n'y a pas contact, alors l'accélération relative est strictement positive et la réaction nulle.*

2. **Loi de friction de Coulomb** : afin de modéliser le comportement de friction pendant une collision :

   > *Pendant la collision, y a-t-il frottement statique, ou y a-t-il glissement (suivant la direction $\mathbf{T}_j$ ou $-\mathbf{T}_j$) ?*

Discussion sur la thèse

- Les floes sont rigides;
- Le modèle ne gère pas la rhéologie de la glace;
- Les coefficients de friction et de restitution sont limitants.

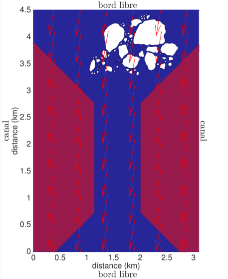
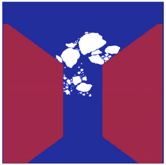
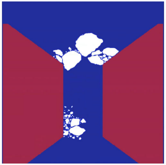


Figure – Configuration initiale (Rabatel, 2015)



(a) à 2h04



(b) à 3h40

Figure – Dérive sous l'effet de la force de Coriolis (Rabatel, 2015)

Un modèle de fracture variationnel (Francfort-Marigo)

L'énergie totale s'écrit :

$$E_{\mathrm{tot}} : \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma \times \{\sigma\} \to \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u) : e(u)\, \mathrm{d}x + k\mathcal{H}^1(\sigma).$$

Un modèle de fracture variationnel (Francfort-Marigo)

L'énergie totale s'écrit :

$$E_{\text{tot}} : \bigcup_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma \times \{\sigma\} \to \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \int_{\Omega \setminus \sigma} Ae(u) : e(u)\, \mathrm{d}x + k\mathcal{H}^1(\sigma).$$

Une solution du problème de fracture fragile est un couple (u^*, σ^*) qui vérifie :

$$E_{\text{tot}}(u^*, \sigma^*) = \min_{\sigma \in \Sigma} \min_{u \in A_\sigma} E_{\text{tot}}(u, \sigma)\,.$$

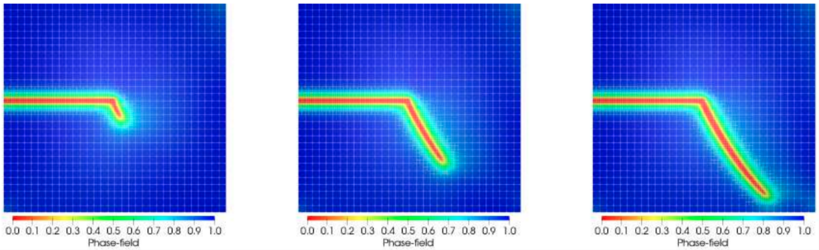


Figure – Bifurcation d'une fracture (Nagaraja et al., 2019)

Réseaux de ressorts à grande raideur

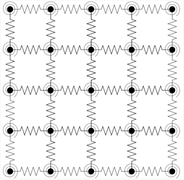


Figure – Réseau de ressorts régulier (Balasoiu, 2020)

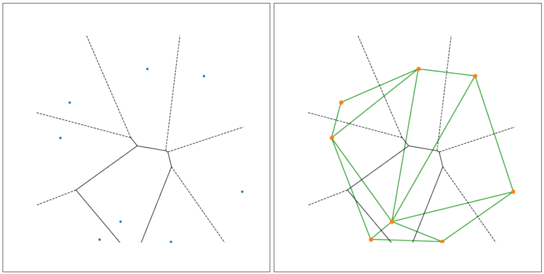


Figure – Tirage de points et diagrammes de Voronoi (à gauche) et Delaunay (à droite) (Balasoiu, 2020)

Déplacement des noeuds d'un floe isolé (1)

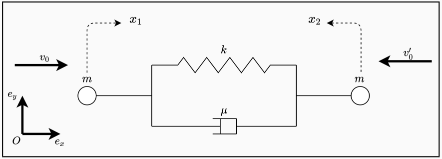


Figure – Floe de glace 1D

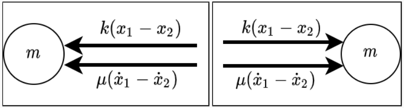


Figure – Bilan des forces

Déplacement des noeuds d'un floe isolé (1)

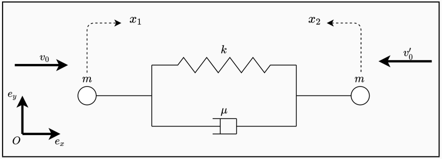


Figure – Floe de glace 1D

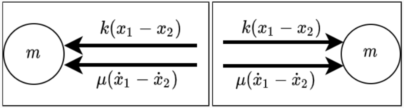


Figure – Bilan des forces

Les équations de Newton-Euler :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\,, \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\,. \end{cases}$$

On préfère la forme matricielle :

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = EY(t)\,, \\ Y(0) = (0, 0, v_0, -v_0')^T\,, \end{cases}$$

où :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} & \frac{\mu}{m} \\ \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} & \frac{\mu}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{pmatrix}, \text{ et } Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Déplacement des noeuds d'un floe isolé (2)

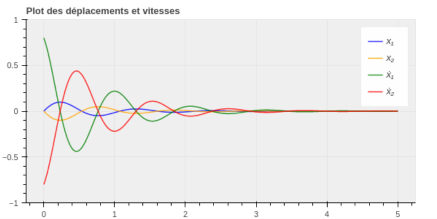
Théorème (Convergence du modèle 1D à deux nœuds) (NZOYEM et LABBÉ, 2021)

Partant d'une position d'équilibre $x_1(0) = x_2(0) = 0$, les déplacements $x_1(\cdot)$ et $x_2(\cdot)$ des deux nœuds du floe 1D (avec viscosité $\mu > 0$) convergent si et seulement si leurs vitesses initiales sont opposées i.e. $\mathrm{v}_0 = -\mathrm{v}_0'$.

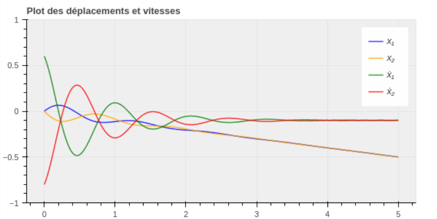
En effet :

$$x_1(t) = \frac{t}{2}\left(v_0 - v_0'\right) + \frac{e^{\alpha t}\sin(\beta t)}{2\beta}\left(v_0 + v_0'\right), \quad x_2(t) = \frac{t}{2}\left(v_0 - v_0'\right) - \frac{e^{\alpha t}\sin(\beta t)}{2\beta}\left(v_0 + v_0'\right),$$

où : $\alpha = -\frac{\mu}{m}$ et $\beta = -\frac{\sqrt{2km - \mu^2}}{m}$.



(a) $v_0 = v_0' = 0.8$



(b) $v_0 = 0.6$ et $v_0' = 0.8$

Figure – Simulation du déplacement d'un floe 1D à 2 nœuds

Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré

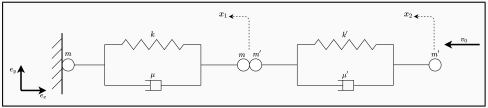


Figure – Collision 1D avec fixation d'un floe

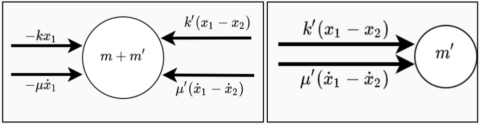


Figure – Bilan des forces

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} (m+m')\ddot{x}_1 = -kx_1 - \mu\dot{x}_1 + k'(x_2 - x_1) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\,, \\ m'\ddot{x}_2 = -k'(x_2 - x_1) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_1). \end{cases}$$

Collision parfaitement inélastique avec un floe encastré

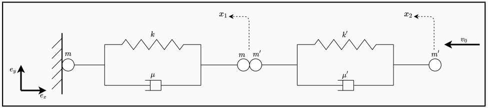


Figure – Collision 1D avec fixation d'un floe

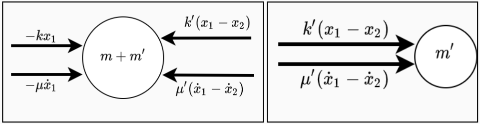


Figure – Bilan des forces

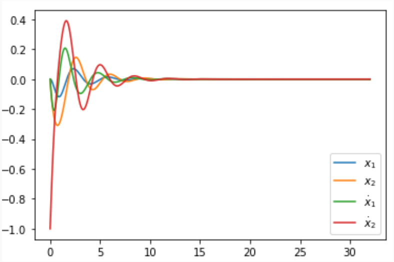


Figure – Résultat de simulation

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} (m+m')\ddot{x}_1 = -kx_1 - \mu\dot{x}_1 + k'(x_2-x_1) + \mu'(\dot{x}_2-\dot{x}_1)\,, \\ m'\ddot{x}_2 = -k'(x_2-x_1) - \mu'(\dot{x}_2-\dot{x}_1). \end{cases}$$

Collision parfaitement inélastique avec au départ un floe immobile

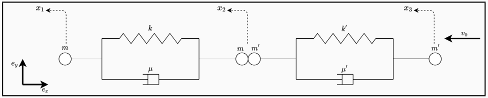


Figure – Collision 1D sans mur

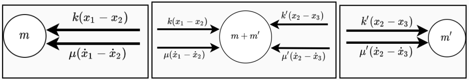


Figure – Bilan des forces

Le système est régi par les équations :

$$
\begin{cases}
m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\,, \\
(m + m')\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_2 - x_3) - \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)\,, \\
m'\ddot{x}_3 = k'(x_2 - x_3) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)\,.
\end{cases}
$$

Collision parfaitement inélastique avec au départ un floe immobile

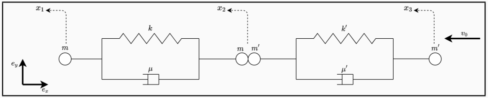
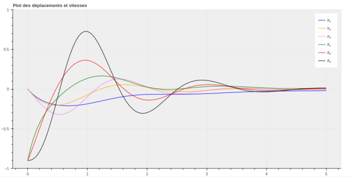


Figure – Collision 1D sans mur



(a) Cas convergent

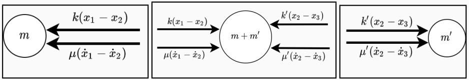
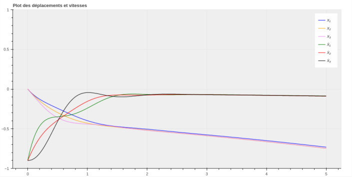


Figure – Bilan des forces



(b) Cas non convergent

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\,, \\ (m + m')\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_2 - x_3) - \mu \\ m'\ddot{x}_3 = k'(x_2 - x_3) + \mu'(\dot{x}_2 - \dot{x}_3)\,. \end{cases}$$

Remarque

Le critère de convergence n'est pas clair (i.e. $\mu << \mu'$, k très grand, etc.)!

Collision inélastique avec séparation des masses

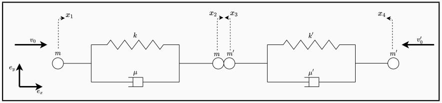


Figure – Collision 1D inélastique

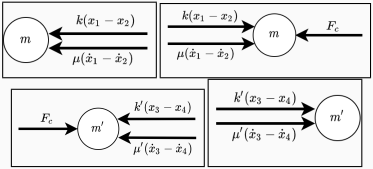


Figure – Bilan des forces

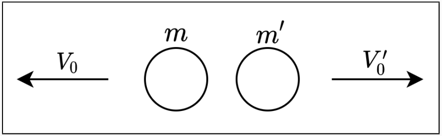


Figure – Situation après contact

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\,, \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - F_c\,, \\ m'\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + F_c\,, \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)\,. \end{cases}$$

Collision inélastique avec séparation des masses

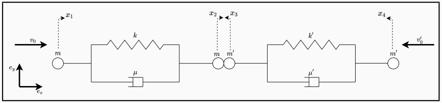


Figure – Collision 1D inélastique

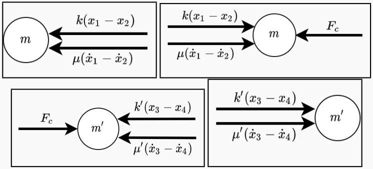


Figure – Bilan des forces

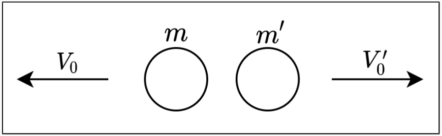


Figure – Situation après contact

Le système est régi par les équations :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) - \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\,, \\ m\ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - F_c\,, \\ m'\ddot{x}_3 = -k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4) + F_c\,, \\ m'\ddot{x}_4 = k'(x_3 - x_4) + \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)\,. \end{cases}$$

Avec ε est le coefficient de restitution et :

$$I = \int_{t^-}^{t^+} k(x_1 - x_2) + \mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k'(x_3 - x_4) - \mu'(\dot{x}_3 - \dot{x}_4)\,\mathrm{d}t\,,$$

les vitesses après contact sont :

$$V_0 = \frac{I + (m - \varepsilon m')v_0 + (1+\varepsilon)m'v_0'}{m + m'}\,,$$

$$V_0' = \frac{I + (1+\varepsilon)mv_0 + (m' - \varepsilon m)v_0'}{m + m'}\,.$$

Des modèles généraux pour la percussion avec séparation des masses (1)

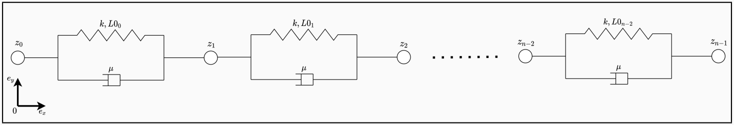


Figure – Illustration d'un floe 1D contenant n masses

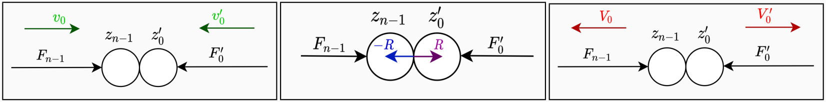
Sous forme matricielle, on a le système :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \ddot{z}_0 \\ \ddot{z}_1 \\ \vdots \\ \ddot{z}_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & I_n \\ \hline B & C \end{array}\right)}_{2n \times 2n} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline D & \mathbf{0} \end{array}\right)}_{(2n) \times (2n-2)} \begin{pmatrix} L0_0 \\ L0_1 \\ \vdots \\ L0_{n-2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

où :

$$B = \begin{pmatrix} -k & k & & & \\ k & -2k & k & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & k & -2k & k \\ & & & k & -k \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & & & \\ \mu & -2\mu & \mu & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu & -2\mu & \mu \\ & & & \mu & -\mu \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -k & & \\ k & -k & \\ & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & -k \\ & & & k \end{pmatrix}.$$

Des modèles généraux pour la percussion avec séparation des masses (2)



(a) Avant le choc (b) Pendant le choc (c) Après le choc

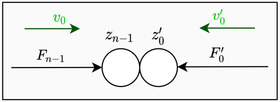
Un modèle qui conserve l'énergie cinétique après chaque choc.

$$V_0 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad V_0' = V_0 + X, \tag{3}$$

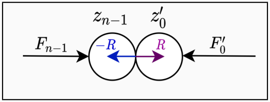
avec :

$$\begin{aligned} X = \varepsilon(v_0 - v_0'),\ Y = m(v_0)^2 + m'(v_0')^2\,, \\ a = m + m'\,, \\ b = -2m'X\,, \\ c = m'X^2 - Y\,, \\ \Delta = b^2 - 4ac. \end{aligned}$$

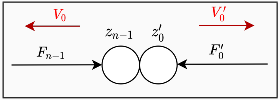
Des modèles généraux pour la percussion avec séparation des masses (2)



(a) Avant le choc



(b) Pendant le choc



(c) Après le choc

Un modèle qui conserve l'énergie cinétique après chaque choc.

$$V_0 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad V'_0 = V_0 + X, \tag{3}$$

avec :

$$\begin{aligned} X = \varepsilon(v_0 - v'_0),\ Y &= m(v_0)^2 + m'(v'_0)^2, \\ a &= m + m', \\ b &= -2m'X, \\ c &= m'X^2 - Y, \\ \Delta &= b^2 - 4ac. \end{aligned}$$

Un modèle qui met en évidence le coefficient de restitution (Hecker, 1997).

$$V_0 = v_0 + \frac{J - I}{m}, \quad V'_0 = v'_0 + \frac{K + I}{m'}, \tag{4}$$

avec :

$$I = \frac{(v_0 - v'_0)(1+\varepsilon) + \frac{J}{m} - \frac{K}{m'}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}},$$

$$J = \int_{t^-}^{t^+} F_{n-1}\,\mathrm{d}t = F_{n-1}\,\Delta t,$$

$$K = \int_{t^-}^{t^+} F'_0\,\mathrm{d}t = F'_0\,\Delta t.$$

Des modèles généraux pour la percussion avec séparation des masses (3)

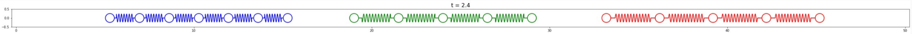


Figure – Configuration des floes pour la simulation

Premier modèle généralisant

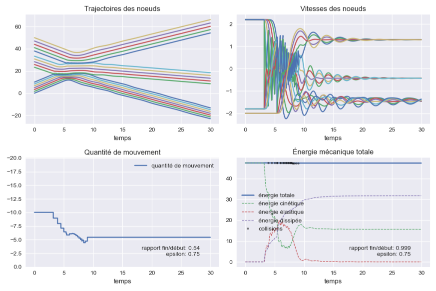


Figure – Résultat pour le modèle qui conserve l'énergie cinétique après chaque choc

Des modèles généraux pour la percussion avec séparation des masses (3)

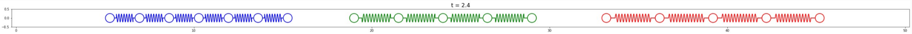


Figure – Configuration des floes pour la simulation

Premier modèle généralisant

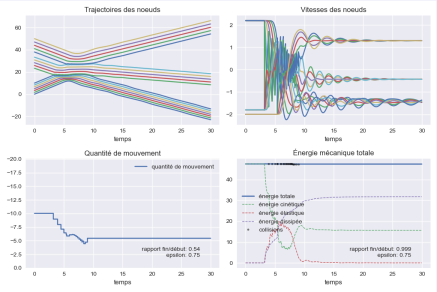


Figure – Résultat pour le modèle qui conserve l'énergie cinétique après chaque choc

Deuxième modèle généralisant

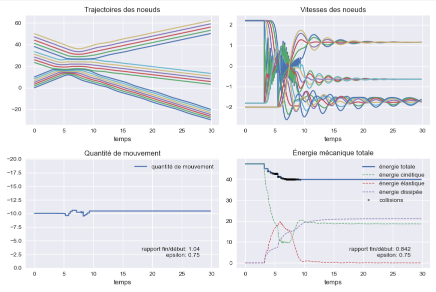


Figure – Résultat pour le modèle qui met en évidence le coefficient de restitution

Différents modèles de fracture fragile

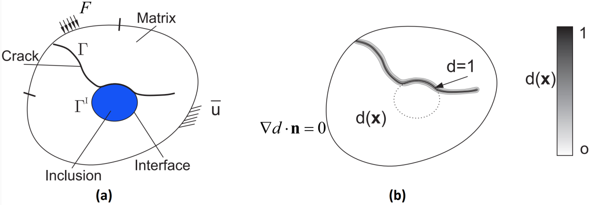


Figure – Champ de phase pour la régularisation d'une fissure (Yvonnet et al., 2018)

Méthode du champ de phase

$$E = \int_\Omega \Psi(\mathbf{u}, \Gamma)\,\mathrm{d}\Omega + G_c \int_\Gamma \mathrm{d}\Gamma,$$

$$\Downarrow$$

$$E = \int_\Omega \Psi(\mathbf{u}, \Gamma)\,\mathrm{d}\Omega + G_c \int_\Gamma \gamma(d, \nabla d)\,\mathrm{d}\Gamma.$$

Différents modèles de fracture fragile

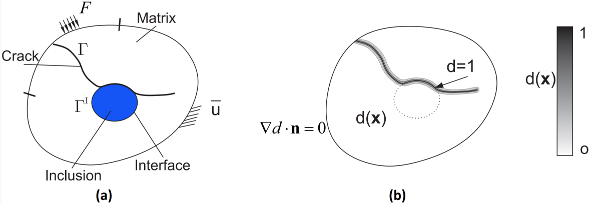


Figure – Champ de phase pour la régularisation d'une fissure (Yvonnet et al., 2018)

Méthode du champ de phase

$$E = \int_\Omega \Psi(\mathbf{u}, \Gamma)\, \mathrm{d}\Omega + G_c \int_\Gamma \mathrm{d}\Gamma,$$

$$\Downarrow$$

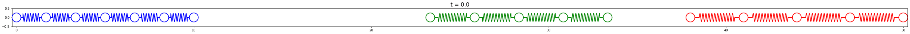
$$E = \int_\Omega \Psi(\mathbf{u}, \Gamma)\, \mathrm{d}\Omega + G_c \int_\Gamma \gamma(d, \nabla d)\, \mathrm{d}\Gamma.$$

Méthode combinatoire

$$E^{n+1} = \text{eng. pot. élastique au temps } t^{n+1}$$
$$+ \text{ ténacité} \times \text{lg. de la fracture envisagée à } t^{n+1}.$$

Code de calcul 1D

Animation de la fracture 1D par un algorithme *event-driven*




```
def runSimulation(self):
    """
    Runs the simulation for the complete fracture problem
    """

    ## Run uniform mouvement phase up to the first collision
    self.computeBeforeContact()

    for key in self.floes.keys():
        self.checkFracFrom[key] = self.t.size

    while self.t.size <= self.NBef + self.NAft and max(self.collCount.values()) < 1000:

        self.computeAfterContact()

        ## (Potential) fracture detection
        floeDict = deepcopy(self.floes)
        for floe in floeDict.values():
            self.checkFracture(floe.id)

        ## Collision detection
        for floe in self.floes.values():
            for node in floe.nodes:
                res = self.checkCollision(node.id, node.rightNode)

        ## Assign the same value to all keys to check collision from now on
        smallestCheckCollFrom = min(self.checkCollFrom.values())
        for key in self.checkCollFrom.keys():
            self.checkCollFrom[key] = smallestCheckCollFrom

        ## Assign the same value to all keys tp check fracture from now on
        smallestCheckFracFrom = min(self.checkFracFrom.values())
        for key in self.checkFracFrom.keys():
            self.checkFracFrom[key] = min([smallestCheckFracFrom, smallestCheckCollFrom])
```

Listing – Code de simulation 1D

Déplacement des nœuds d'un floe isolé (1)

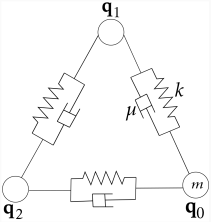


Figure – Floe de glace 2D

Les équations de Newton-Euler :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad m\ddot{\mathbf{q}}_i = \underbrace{\sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[k \left(\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij} \right) \mathbf{u}_{ij} - \mu \left\langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i,\, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right]}_{\mathbf{F}_i} .$$

Schéma d'Euler explicite :

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = 2\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[k \left(\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij} \right) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{\Delta t} \left\langle \mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1} - \mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1},\, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right]$$

Déplacement des nœuds d'un floe isolé (1)

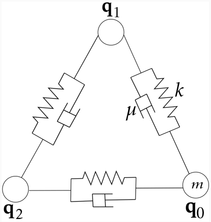


Figure – Floe de glace 2D

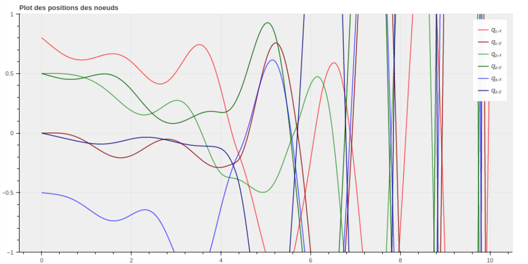


Figure – Simulation avec $T = 10$

Les équations de Newton-Euler :

$$\forall i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad m\ddot{\mathbf{q}}_i = \underbrace{\sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[k \left(\|\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i\| - L_{ij} \right) \mathbf{u}_{ij} - \mu \left\langle \dot{\mathbf{q}}_j - \dot{\mathbf{q}}_i, \, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right]}_{\mathbf{F}_i}.$$

Schéma d'Euler explicite :

$$\mathbf{q}_i^{n+1} = 2\mathbf{q}_i^n - \mathbf{q}_i^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{m} \sum_{j=i+1}^{i+2} C_{ij} \left[k \left(\|\mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_i^n\| - L_{ij} \right) \mathbf{u}_{ij} - \frac{\mu}{\Delta t} \left\langle \mathbf{q}_j^n - \mathbf{q}_j^{n-1} - \mathbf{q}_i^n + \mathbf{q}_i^{n-1}, \, \mathbf{u}_{ij} \right\rangle \mathbf{u}_{ij} \right]$$

Déplacement des nœuds d'un floe isolé (2)

Listing – Code de simulation et schéma avec Scipy

```
q0 = np.stack([q1_0, dotq1_0, q2_0, dotq2_0, q3_0, dotq3_0])
q0_ = np.reshape(q0, (nb_nodes*4))

def model(t, Q_):
    Q = np.reshape(Q_, (nb_nodes*2, 2))
    Q_ret = np.zeros_like(Q)
    Q_ret[2*0] = 0; Q_ret[2*1] = 0

    for i in range(1, nb_nodes):  ## <-- Node 0 is immobilized
        Q_ret[2*i] = Q[2*i+1]

        for neighbor in range(i+1, i+3):
            j = neighbor % nb_nodes
            u[i,j] = (Q[2*j] - Q[2*i]) / nplin.norm(Q[2*j] - Q[2*i])
            Q_ret[2*i+1] += (1 / m)*C[i,j]*( k*(nplin.norm(Q[2*j]-Q[2*i]) - L[i,j])*u[i,j]
                        -  mu*(np.dot(Q[2*j+1] - Q[2*i+1], u[i,j]))*u[i,j] )
    return np.reshape(Q_ret, (nb_nodes*4))

sol = solve_ivp(model, [0,T], q0_, t_eval=t)
```

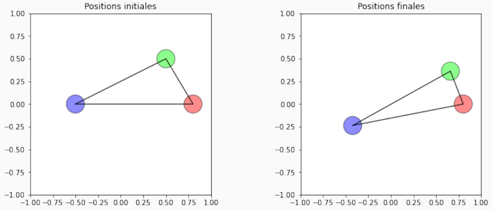


Figure – Illustration à $t = 0$ et $t = 4$

Observation

Avec un schéma Euler explicite, symplectique ou Scipy (RK45), il faut fixer certains nœuds pour que le système reste stable !

Collision parfaitement inélastique entre deux floes (1)

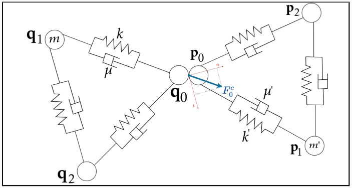


Figure – Illustration de la percussion 2D

$$\begin{cases} (m+m')\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^{'}, & \text{(SE)} \\ \ddot{\mathbf{p}}_0 = \ddot{\mathbf{q}}_0, \dot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{p}_0 = \mathbf{q}_0 - \Delta_0, & \text{(SE)} \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i\,, \quad \forall 1 \leq i \leq n-1, & \text{(SI)} \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^{'}\,, \quad \forall 1 \leq i \leq n'-1, & \text{(SI)} \end{cases}$$

où : $\Delta_0 = \mathbf{q}_0(0) - \mathbf{p}_0(0).$

Collision parfaitement inélastique entre deux floes (1)

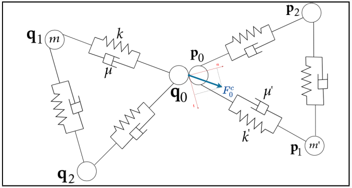


Figure – Illustration de la percussion 2D

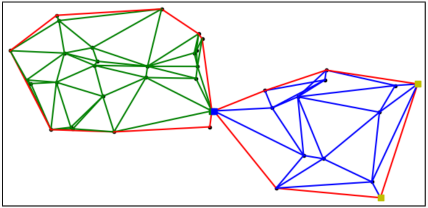
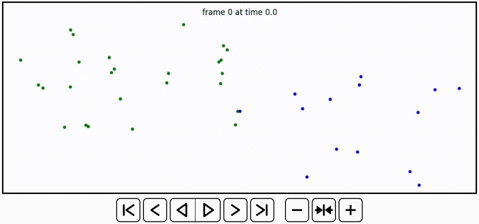


Figure – Un maillage 2D par processus de Poisson

$$\begin{cases} (m+m')\ddot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_0^{'}, & \text{(SE)} \\ \ddot{\mathbf{p}}_0 = \ddot{\mathbf{q}}_0\,,\, \dot{\mathbf{p}}_0 = \dot{\mathbf{q}}_0\,,\, \mathbf{p}_0 = \mathbf{q}_0 - \Delta_0, & \text{(SE)} \\ m\ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i\,, \quad \forall 1 \leq i \leq n-1, & \text{(SI)} \\ m'\ddot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^{'}\,, \quad \forall 1 \leq i \leq n'-1, & \text{(SI)} \end{cases}$$

où : $\Delta_0 = \mathbf{q}_0(0) - \mathbf{p}_0(0).$

Animation de la percussion 2D



Collision parfaitement inélastique entre deux floes (2)

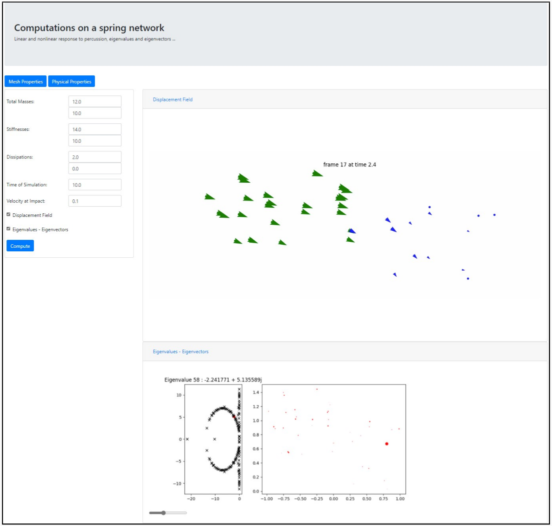


Figure – Client web développé et maintenu avec Flask

Apports et recherches ultérieures

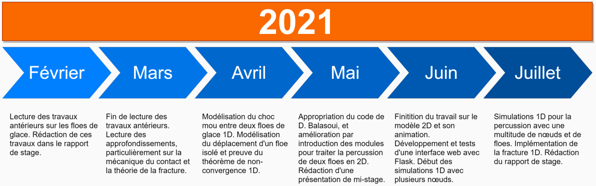


Figure – Résumé du déroulement du stage

Recherches ultérieures

- Implémentation de la méthode du champ de phase;
- Implementation de la fracture au problème 2D, 2.5D, ou 3D;
- Intégration de la fracture au code de Rabatel;
- Confirmation de l'approximation par réseaux de ressorts;
- Optimiser les codes avec Cython ou en C++;
- Tests de validation en laboratoire.

Apports du stage

- Simulation de systèmes dynamiques en Python;
- Prise en main du modèle de rupture de Griffith (analyse fonctionnelle, analyse numérique, etc.);
- Maitrise de l'approche par réseaux de ressorts (probabilité, raisonnance);
- Utilisation de TikZ, Flask, Bokeh, Symbolab, et bien d'autres;
- Recherche en milieu professionnel;
- Savoir-faire transférables (vision globale, etc.).

Apports et recherches ultérieures

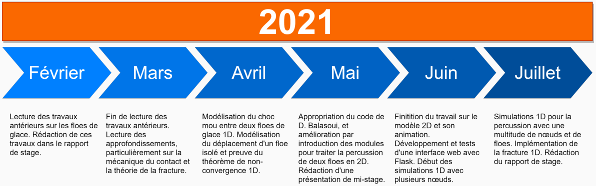


Figure – Résumé du déroulement du stage

Recherches ultérieures

- Implémentation de la méthode du champ de phase ;
- Implementation de la fracture au problème 2D, 2.5D, ou 3D ;
- Intégration de la fracture au code de Rabatel ;
- Confirmation de l'approximation par réseaux de ressorts ;
- Optimiser les codes avec Cython ou en C++ ;
- Tests de validation en laboratoire.

Apports du stage

- Simulation de systèmes dynamiques en Python ;
- Prise en main du modèle de rupture de Griffith (analyse fonctionnelle, analyse numérique, etc.) ;
- Maitrise de l'approche par réseaux de ressorts (probabilité, raisonnance) ;
- Utilisation de TikZ, Flask, Bokeh, Symbolab, et bien d'autres ;
- Recherche en milieu professionnel ;
- Savoir-faire transférables (vision globale, etc.).

Apports et recherches ultérieures

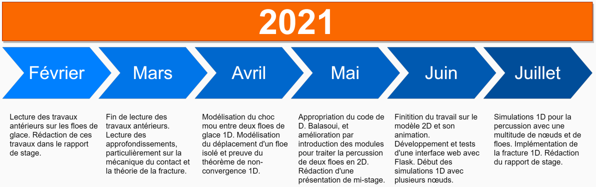


Figure – Résumé du déroulement du stage

Recherches ultérieures

- Implémentation de la méthode du champ de phase ;
- Implementation de la fracture au problème 2D, 2.5D, ou 3D ;
- Intégration de la fracture au code de RABATEL ;
- Confirmation de l'approximation par réseaux de ressorts ;
- Optimiser les codes avec Cython ou en C++ ;
- Tests de validation en laboratoire.

Apports du stage

- Simulation de systèmes dynamiques en Python ;
- Prise en main du modèle de rupture de Griffith (analyse fonctionnelle, analyse numérique, etc.) ;
- Maitrise de l'approche par réseaux de ressorts (probabilité, raisonnance) ;
- Utilisation de TikZ, Flask, Bokeh, Symbolab, et bien d'autres ;
- Recherche en milieu professionnel ;
- Savoir-faire transférables (vision globale, etc.).

Apports et recherches ultérieures

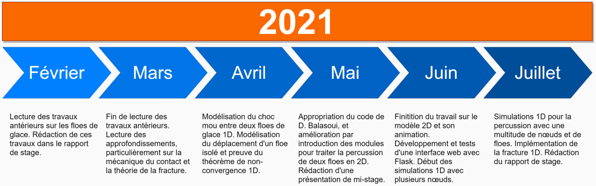


Figure – Résumé du déroulement du stage

Recherches ultérieures

- Implémentation de la méthode du champ de phase ;
- Implementation de la fracture au problème 2D, 2.5D, ou 3D ;
- Intégration de la fracture au code de Rabatel ;
- Confirmation de l'approximation par réseaux de ressorts ;
- Optimiser les codes avec Cython ou en C++ ;
- Tests de validation en laboratoire.

Apports du stage

- Simulation de systèmes dynamiques en Python ;
- Prise en main du modèle de rupture de Griffith (analyse fonctionnelle, analyse numérique, etc.) ;
- Maitrise de l'approche par réseaux de ressorts (probabilité, raisonnance) ;
- Utilisation de TikZ, Flask, Bokeh, Symbolab, et bien d'autres ;
- Recherche en milieu professionnel ;
- Savoir-faire transférables (vision globale, etc.).

Apports et recherches ultérieures

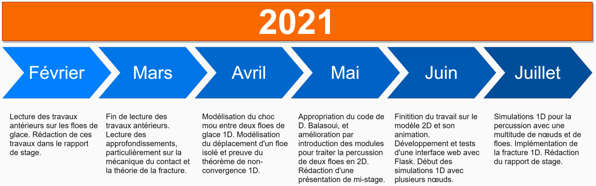


Figure – Résumé du déroulement du stage

Recherches ultérieures

- Implémentation de la méthode du champ de phase;
- Implementation de la fracture au problème 2D, 2.5D, ou 3D;
- Intégration de la fracture au code de RABATEL;
- Confirmation de l'approximation par réseaux de ressorts;
- Optimiser les codes avec Cython ou en C++;
- Tests de validation en laboratoire.

Apports du stage

- Simulation de systèmes dynamiques en Python;
- Prise en main du modèle de rupture de Griffith (analyse fonctionnelle, analyse numérique, etc.);
- Maitrise de l'approche par réseaux de ressorts (probabilité, raisonnance);
- Utilisation de TikZ, Flask, Bokeh, Symbolab, et bien d'autres;
- Recherche en milieu professionnel;
- Savoir-faire transférables (vision globale, etc.).

Apports et recherches ultérieures

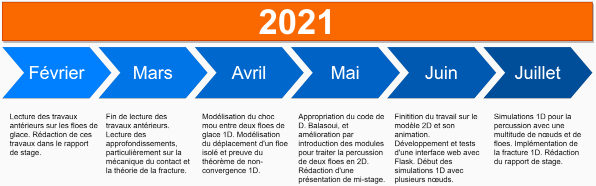


Figure – Résumé du déroulement du stage

Recherches ultérieures

- Implémentation de la méthode du champ de phase;
- Implementation de la fracture au problème 2D, 2.5D, ou 3D;
- Intégration de la fracture au code de Rabatel;
- Confirmation de l'approximation par réseaux de ressorts;
- Optimiser les codes avec Cython ou en C++;
- Tests de validation en laboratoire.

Apports du stage

- Simulation de systèmes dynamiques en Python;
- Prise en main du modèle de rupture de Griffith (analyse fonctionnelle, analyse numérique, etc.);
- Maitrise de l'approche par réseaux de ressorts (probabilité, raisonnance);
- Utilisation de TikZ, Flask, Bokeh, Symbolab, et bien d'autres;
- Recherche en milieu professionnel;
- Savoir-faire transférables (vision globale, etc.).

Apports et recherches ultérieures

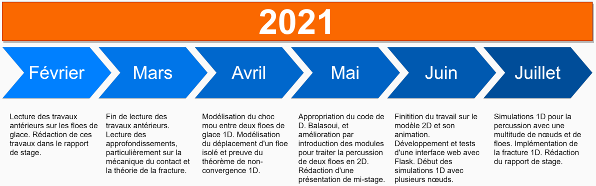


Figure – Résumé du déroulement du stage

Recherches ultérieures

- Implémentation de la méthode du champ de phase;
- Implementation de la fracture au problème 2D, 2.5D, ou 3D;
- Intégration de la fracture au code de Rabatel;
- Confirmation de l'approximation par réseaux de ressorts;
- Optimiser les codes avec Cython ou en C++;
- Tests de validation en laboratoire.

Apports du stage

- Simulation de systèmes dynamiques en Python;
- Prise en main du modèle de rupture de Griffith (analyse fonctionnelle, analyse numérique, etc.);
- Maitrise de l'approche par réseaux de ressorts (probabilité, raisonnance);
- Utilisation de TikZ, Flask, Bokeh, Symbolab, et bien d'autres;
- Recherche en milieu professionnel;
- Savoir-faire transférables (vision globale, etc.).

Apports et recherches ultérieures

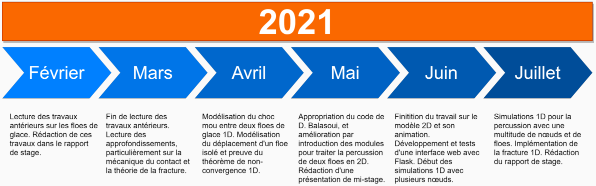


Figure – Résumé du déroulement du stage

Recherches ultérieures

- Implémentation de la méthode du champ de phase ;
- Implementation de la fracture au problème 2D, 2.5D, ou 3D ;
- Intégration de la fracture au code de Rabatel ;
- Confirmation de l'approximation par réseaux de ressorts ;
- Optimiser les codes avec Cython ou en C++ ;
- Tests de validation en laboratoire.

Apports du stage

- Simulation de systèmes dynamiques en Python ;
- Prise en main du modèle de rupture de Griffith (analyse fonctionnelle, analyse numérique, etc.) ;
- Maitrise de l'approche par réseaux de ressorts (probabilité, raisonnance) ;
- Utilisation de TikZ, Flask, Bokeh, Symbolab, et bien d'autres ;
- Recherche en milieu professionnel ;
- Savoir-faire transférables (vision globale, etc.).

Liste récapitulative et délivrables

Checklist des objectifs

- ✓ Prise en main de la notion de Γ-convergence ;
- ✓ Assimilation des travaux antérieurs ;
- ✓ Modélisation de la percussion (1D et 2D) ;
- ✓ Modélisation de la fracture :
  - ✓ en 1D ;
  - × en 2D ;
- × Calculs à l'échelle des floes de glace de l'Arctique.

Liste récapitulative et délivrables

Checklist des objectifs

- ✓ Prise en main de la notion de Γ-convergence ;
- ✓ Assimilation des travaux antérieurs ;
- ✓ Modélisation de la percussion (1D et 2D) ;
- ✓ Modélisation de la fracture :
  - ✓ en 1D ;
  - × en 2D ;
- × Calculs à l'échelle des floes de glace de l'Arctique.

Liste récapitulative et délivrables

Checklist des objectifs

- ✓ Prise en main de la notion de Γ-convergence ;
- ✓ Assimilation des travaux antérieurs ;
- ✓ Modélisation de la percussion (1D et 2D) ;
- ✓ Modélisation de la fracture :
  - ✓ en 1D ;
  - × en 2D ;
- × Calculs à l'échelle des floes de glace de l'Arctique.

Liste récapitulative et délivrables

Checklist des objectifs

- ✓ Prise en main de la notion de Γ-convergence;
- ✓ Assimilation des travaux antérieurs;
- ✓ Modélisation de la percussion (1D et 2D);
- ✓ Modélisation de la fracture :
  - ✓ en 1D;
  - × en 2D;
- × Calculs à l'échelle des floes de glace de l'Arctique.

Liste récapitulative et délivrables

Checklist des objectifs

- ✓ Prise en main de la notion de Γ-convergence;
- ✓ Assimilation des travaux antérieurs;
- ✓ Modélisation de la percussion (1D et 2D);
- ✓ Modélisation de la fracture :
  - ✓ en 1D;
  - × en 2D;
- × Calculs à l'échelle des floes de glace de l'Arctique.

Liste récapitulative et délivrables

Checklist des objectifs

- ✓ Prise en main de la notion de Γ-convergence ;
- ✓ Assimilation des travaux antérieurs ;
- ✓ Modélisation de la percussion (1D et 2D) ;
- ✓ Modélisation de la fracture :
  - ✓ en 1D ;
  - × en 2D ;
- × Calculs à l'échelle des floes de glace de l'Arctique.

Délivrables

1. Rapport de stage : ☛ GitHub ;
2. Code de calcul : ☛ GitHub et ☛ Framagit ;
3. Quelques simulations : ☛ Seafile.

Reférences

BALASOIU, Dimitri (2020). « Modélisation et simulation du comportement mécanique de floes de glace ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes.

HECKER, Chris (1997). « Physics, Part 3 :Collision Response ». In : *Game Developer Magazine*. URL : https://www.chrishecker.com/images/e/e7/Gdmphys3.pdf.

NAGARAJA, Sindhu et al. (2019). « Phase-field modeling of brittle fracture with multi-level hp-FEM and the finite cell method ». In : *Computational Mechanics* 63.6, p. 1283-1300.

NASA EARTH OBSERVATORY (2016). *Growing Pains : Arctic Sea Ice at Record Lows*. URL : https://visibleearth.nasa.gov/images/89223/growing-pains-arctic-sea-ice-at-record-lows/89226w.

NZOYEM, R.D. et Stéphane LABBÉ (2021). « Fracturation de floes de glace par percussion dans un modèle granulaire ». Mém. de mast. URL : https://master-csmi.github.io/csmi-stages/csmi-stages/m2/_attachments/NzoyemNgueguin-RousselDesmond.pdf.

RABATEL, Matthias (2015). « Modélisation dynamique d'un assemblage de floes rigides ». Thèse de doct. Université Grenoble Alpes.

RABATEL, Matthias et al. (2015). « Dynamics of an assembly of rigid ice floes ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 120.9, p. 5887-5909.

YVONNET, Julien et al. (2018). « Fissuration dans les microstructures de materiaux cimentaires : outils de simulation par la méthode de champ de phase ». In : *Colloque national MECAMAT Aussois «Matériaux Numériques*.

Merci pour votre attention ☺!

Questions ?