Élasticité, théorie et applications

Lucas JACQUIN

August 24, 2021

Sommaire

Équations de l'élasticité

$$\Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad d = 2,3, \quad \partial\Omega = \Gamma_D \bigcup \Gamma_N.$$

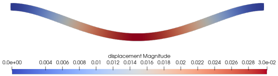
$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \nabla \cdot (F\Sigma) &= f \text{ dans } \Omega \ , \\ \eta &= g_D \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \ , \\ F\Sigma \mathrm{n} &= g_N \quad \text{sur} \quad \Gamma_N \ , \end{aligned} \tag{1}$$

$$\Sigma = \lambda \mathrm{tr}\,(E)\,\mathrm{I} + 2\mu E, \qquad E = \frac{1}{2}\left(\nabla\eta + \nabla\eta^T + \nabla\eta^T\nabla\eta\right)$$

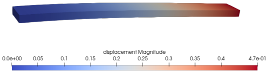
Élasticité linéaire

$$
\begin{aligned}
E = \frac{1}{2}\left(\nabla\eta + \nabla\eta^T + \nabla\eta^T\nabla\eta\right) \to e = \frac{1}{2}\left(\nabla\eta + \nabla\eta\right)\\
\rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \nabla\cdot\sigma = f \text{ dans } \Omega \ ,\\
\eta = g_D \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \ ,\\
\sigma \mathrm{n} = g_N \quad \text{sur} \quad \Gamma_N \ ,\\
\sigma = \lambda \mathrm{tr}\left(e\right)\mathrm{I} + 2\mu e, \quad e = \frac{1}{2}\left(\nabla\eta + \nabla\eta^T\right)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Modélisation de l’élasticité linéaire



(a) Poutre fixée des deux côtés



(b) Poutre 3D fixée d’un côté

Figure: Poutres élastiques soumises à la gravité

Élasticité active

$\rightarrow$ Forces externes ET internes

- Fibres, tubules
- Courant électrique, protéines
- Modélisation additive ou multiplicative

Élasticité active additive, théorie

- Contrainte
- Modélisation "globale" des composantes actives
- Une seule direction active

$$e_a \text{ la direction des fibres actives}$$

$$\Sigma_a \text{ le tenseur d'étirement/élongation}$$

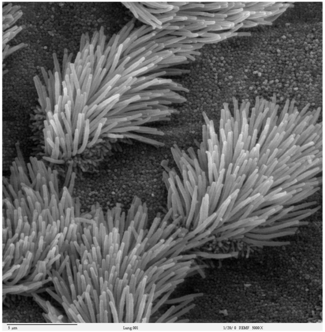
$$\Sigma^* = \Sigma_a e_a \otimes e_a$$

Théorie

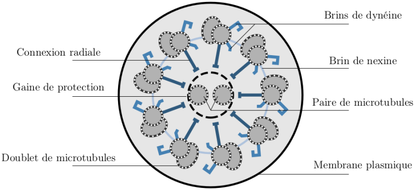
$$\Sigma \to \Sigma - \Sigma^*$$

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \nabla\cdot(F(\Sigma - \Sigma^*)) = f \ \text{dans}\ \Omega\ , \\ \eta = g_D \ \ \text{sur} \ \ \Gamma_D\ , \\ (F\Sigma - F\Sigma^*)\mathrm{n} = g_N \ \ \text{sur} \ \ \Gamma_N\ . \end{aligned} \tag{3}$$

Applications



(a) Cils bronchiques [1]

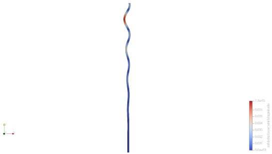


(b) Coupe transversale d'un cil eucaryote [1]

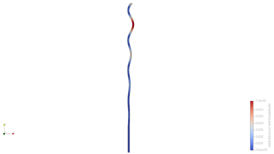
Applications

- Dyskinésie ciliaire primitive
- Asthme
- Grippe
- Mucoviscidose
- Micro-nageurs

Modélisation

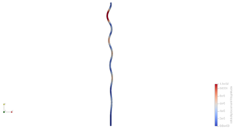


(c) $t = 0.059$

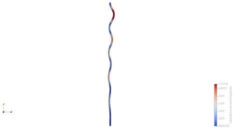


(d) $t = 0.169$

Figure: Battement de cil à amplitude variable
$\Sigma_a(x, y, t) = -xy^2 \sin(2\pi(\frac{y}{6.5} - 12t)),\ e_a = (1, 0)$



(a) $t = 0.059$



(b) $t = 0.104$

Figure: Battement de cil 3D à amplitude variable
$\Sigma_a(x, y, t) = -xy \sin(2\pi(\frac{y}{6.5} - 12t)),\ e_a = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$

Élasticité active multiplicative, théorie

- Tension
- Contraction des fibres actives
- Décomposition du gradient de la déformation

$$F_a \text{ la déformation active}$$

$$F_e = F F_a^{-1}$$

Applications

- Modélisation des myofibrilles:

$$F_a = \mathbf{I} + (\gamma_a - 1)\, e \otimes e$$

- Modélisation de fibres isotropes:

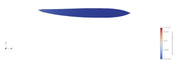
$$F_a = \gamma_a \mathbf{I}$$

- Modélisation du cœur [4]
- Modélisation de la paroi artérielle coronaire [4]

Poisson

(a) $t = 0.05$

(b) $t = 0.08$



(c) $t = 0.11$

(d) $t = 0.14$

(e) $t = 0.17$

(f) $t = 0.20$

(g) $t = 0.23$

(h) $t = 0.26$

Figure: Simulation de nage d'un poisson

Référentiel Eulérien

- Ω fixé
- x un point de l'espace fixé
- (x, t) indissociables

$\rightarrow$ Mécanique des fluides

Référentiel Lagrangien

- Ω le matériau de référence, $\hat{\Omega}$ le matériau déformé
- $\hat{x}$ un point de $\hat{\Omega}$
- $(\hat{x}, t)$ indépendants

$\rightarrow$ Petite déformation

Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE)

- Ni fixé dans l'espace, ni attaché au matériau
- Nodes fixés ou non

$\rightarrow$ Grosses déformations
$\rightarrow$ Interactions fluide-structure

Perspectives

- Élasticité active multiplicative
- ALE et interaction fluide-structure

Bibliographie

- Vergnet Fabien.
  Structures actives dans un fluide visqueux: modélisation.
  analyse mathématique et simulations numériques, 2019.
- Cristinel Mardare.
  Méthodes mathématiques en élasticité.
- Teresi Nardinocchi.
  On the active response of soft living tissues.
  J.of Elasticity, 2007.
- Yohan Payan.
  Biomechanics of living organs.
  2017.
- Alfio Quarteroni.
  Cardiovascular mathematics.
  2009.