

Université de Strasbourg

Stage Master 1 CSMI

**Stratégies optimales
de régulation d'épidémies**

Vincent Italiano

2020-2021

Contents

1	Présentation du stage	3
2	Modèle épidémiologique	4
2.1	modèles compartimentaux	4
2.2	Le modèle SIR	5
3	Théorie du contrôle	7
3.1	Principe du maximum de Pontryaguin	7
4	Contrôle optimal en épidémiologie	9
4.1	Résultats préliminaires	10
4.2	Résultats principaux	11
5	Aspect numériques	13
5.1	Avec GEKKO	13
5.2	Avec une descente de gradient	14
5.2.1	Calcul du gradient	14
5.2.2	Implémentation	15
5.3	Par une dichotomie	16

1 Présentation du stage

Ce stage a été effectué au sein de l'équipe MIMESIS, à l'INRIA, sous la direction de Michel Duprez et Yannick Privat. Les objectifs du stage étaient d'apprendre et de comprendre les mathématiques qui se cachent derrière les modèles en épidémiologies et la théorie du contrôle optimal. Pour cela, j'ai étudié et reproduit les résultats de l'article [2]. Celui-ci applique la théorie du contrôle optimal à un modèle très utilisé en épidémiologie : le modèle SIR. L'objectif étant de trouver une stratégie de confinement optimal pour un certain critère. Pour cela, on commence par une analyse mathématique du problème (existence de solution, unicité, propriétés des solutions, etc.) puis on a implémenté la résolution en Python.

2 Modèle épidémiologique

L'évolution d'une épidémie au sein d'une population dépend de nombreux paramètres qui peuvent être complexes (stades cliniques possibles, déplacement des individus, souches de la maladie, etc..). C'est pourquoi les modèles mathématiques se sont peu à peu affirmés comme outils d'aide à la décision pour les politiques publiques. Ces modèles mathématiques permettent de prévoir les conséquences sanitaires d'actions aussi variées que la vaccination, la mise en quarantaine ou le confinement.

En 1927, les mathématiciens Anderson Gray McKendrick et William Ogilvy Kermack proposent d'utiliser des modèles compartimentaux pour modéliser une épidémie. Le principe est de diviser la population en classes épidémiologiques telles que les individus susceptibles d'être infectés, ceux qui sont infectieux, et ceux qui ont acquis une immunité à la suite de la guérison. Depuis, cette approche est utilisée pour modéliser de nombreuses maladies, et continue d'être un sujet de recherche actif.

2.1 modèles compartimentaux

Les compartiments divisent la population en divers états possibles par rapport à la maladie. Par exemple, S , I , ou R , (Susceptible, Infectious, ou Recovered). Des règles spécifient la proportion des individus passant d'un compartiment à un autre. Par exemple, il y a une proportion d'individus sains devenant infectés et, selon les maladies, il peut aussi exister une proportion d'individus infectieux étant guéris.

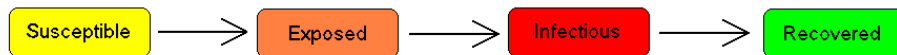


Figure 1: Modèle SEIR

Selon les maladies on utilisera l'un ou l'autre type de compartiment et différente règle lors de la modélisation. Par exemple si la maladie est causée par des organismes parasites, alors la concentration de ces organismes peut justifier de diviser la classe I en plusieurs classes représentant plusieurs niveaux de concentration.

Mise sous la forme d'équations différentielles.

Les modèles compartimentaux permettent d'estimer comment le nombre d'individus dans chaque compartiment varie au cours du temps. Par exemple, notons $S(t)$ le nombre d'individu sains au temps t . La variation du nombre d'individus sains est donnée par dérivée $\frac{d}{dt}S$. Les règles de passage d'un compartiment à l'autre permettent alors d'écrire le modèle sous la forme d'un système différentiel.

2.2 Le modèle SIR

Le modèle SIR est un des modèles les plus simple, dans lequel la population est divisée en trois sous-groupes :

- S : représente les personnes saines.
- I : les personnes infectées.
- R : les personnes retirées

Un individu du groupe S peut passer dans le groupe I si il est infecté par un individu du groupe I et un individu du groupe I peut passer dans le groupe R s'il guéri de la maladie. De plus on fait l'hypothèse que la taille de la population reste constante.

Il est important de bien différencier les personnes saines des personnes retirées : les personnes saines n'ont pas encore été touchées par la maladie, alors que les personnes retirées sont guéries, et donc immunisées.

Le modèle SIR peut être représenté par le schéma suivant :



Figure 2: Modèle SIR

Où β représente le taux de transmission, c'est à dire le taux de personnes saines qui deviennent infectées et γ le taux de guérison, c'est à dire le taux de personnes infectées qui deviennent retirées.

On réécrit tout cela sous forme d'un système différentiel :

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) = \gamma I(t) \\ S(t_0) = S_0, I(t_0) = I_0, R(t_0) = R_0 \end{cases} \quad (1)$$

avec $S_0 + I_0 + R_0 = 1$. Ici les fonctions S, I , et R représentent respectivement la proportions d'individus qui sont dans la classe S, I ou R au cours du temps.

Propriétés du modèle SIR.

1. Les fonctions S, I et R admettent une limite lorsque t tend vers $+\infty$. De plus $\lim_{t \rightarrow 0} I(t) = 0$.

2. La dynamique du système est entièrement déterminée par les conditions initiales et la quantité $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ appelée *nombre de reproduction de base*. En effet, si $\mathcal{R}_0 < 1$, alors I' est toujours négative et I décroît jusqu'à 0 : il n'y a pas d'épidémie. Si $\mathcal{R}_0 > 1$, une épidémie a lieu si $S_0 > \frac{1}{\mathcal{R}_0}$. Dans ce cas I croît jusqu'à atteindre son maximum, puis décroît jusqu'à 0.

3. On appelle seuil d'immunité collective la valeur S_{herd} , définie comme la valeur de S à partir de laquelle le nombre d'infecté commence à diminuer. Pour le modèle SIR on a $S_{\text{herd}} = 1/\mathcal{R}_0$.

Influence des paramètres.

Voyons comment se comporte les fonctions S, I et R lorsqu'on fait varier les paramètres β et γ du modèle.

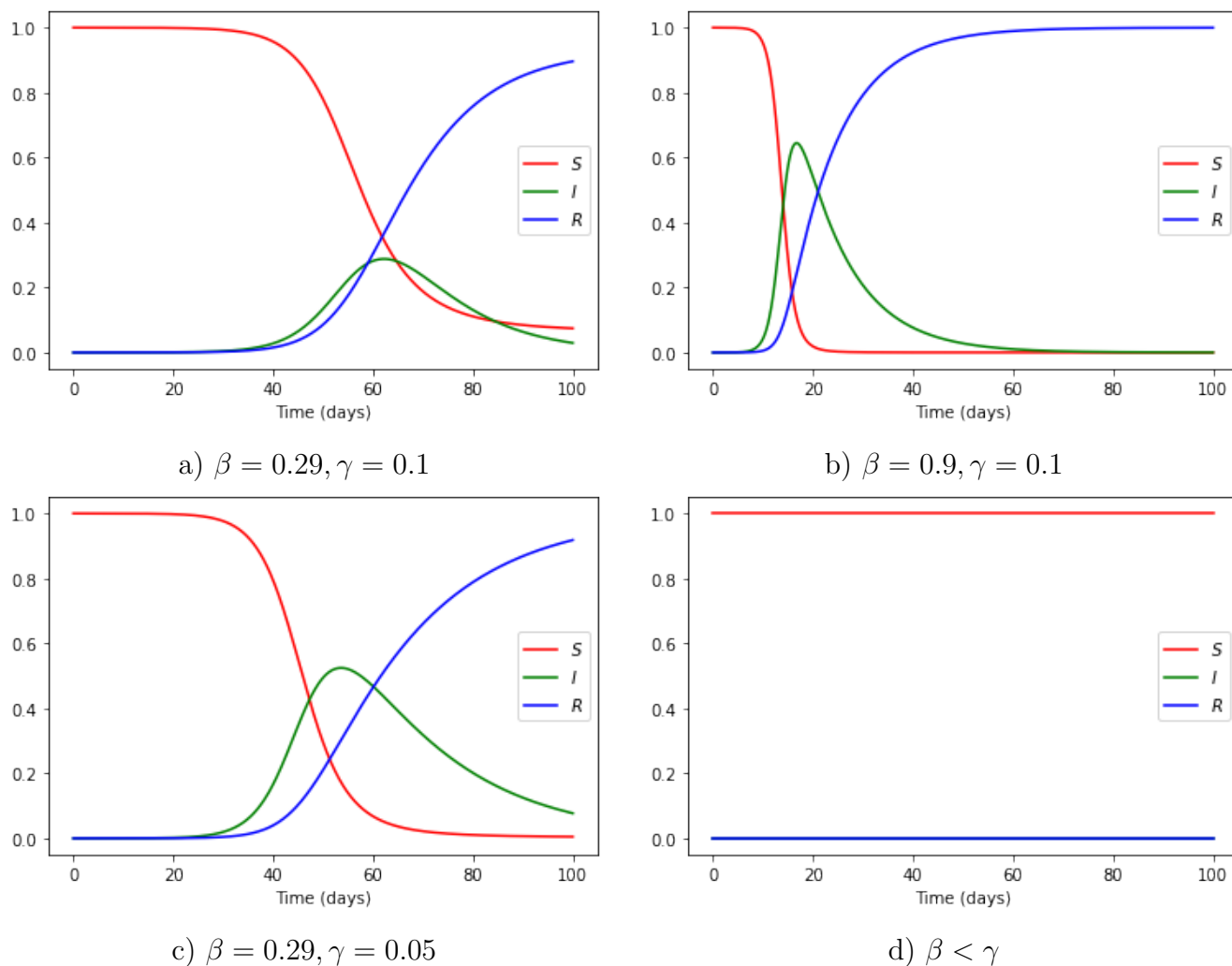


Figure 3: solution du problème (1)

3 Théorie du contrôle

Qu'est ce que le contrôle optimal? La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes contrôlé, c'est-à-dire des systèmes dynamiques (systèmes différentiels, systèmes discrets, etc...) sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certains critères. L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).

3.1 Principe du maximum de Pontryaguin

Le théorème suivant est le appelé Principe du maximum de Pontryaguin. Il est fondamental en contrôle optimal car il donne une conditions nécessaire d'optimalité sur le contrôle, et transforme le problème en dimension infinie en une infinité de problème d'optimisation en dimension un.

Théorème 3.1 *Soit le système contrôlé*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), u(t)) & t \in I \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, t_e(u)[$ de \mathbb{R}_+ et à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^m$. Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n . On note \mathcal{U} l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps $t(u) < t_e(u)$. Par ailleurs on définit le coût d'un contrôle u sur $[0, t]$ par

$$C(t, u) = \int_0^t f^0(s, x(s), u(s)) ds + g(t, x(t))$$

où $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont C^1 , et $x(\cdot)$ est la trajectoire solution associée au contrôle u .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle $u \in \mathcal{U}$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel $p_0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p_0)$ est non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$x'(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) \tag{2}$$

$$p'(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) \tag{3}$$

où $\mathcal{H}(t, x, p, p_0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p_0 f_0(t, x, u)$ est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$

$$\mathcal{H}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) = \max_{v \in U} \mathcal{H}(t, x(t), p(t), p_0, v).$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(T) \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux) manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0 \tag{4}$$

$$p(T) - p_0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)}M_1 \tag{5}$$

Cet énoncé est très général mais il sera très utile dans la suite.

4 Contrôle optimal en épidémiologie

Pour maîtriser une épidémie modélisée par le modèle SIR , il y a différentes méthodes. La première consiste à faire passer les individus de la classe S directement dans la classe R , sans passer par la classe I . Cela peut être réalisé avec un vaccin par exemple. La seconde, consisterait à faire passer plus rapidement les individus de la classe I à la classe R , en les mettant par exemple en quarantaine. Enfin, on peut réduire le nombre d'individus qui vont de la classe S à la classe I , en instaurant par exemple un confinement. C'est sur cette dernière méthode que nous avons travaillé.

On souhaite réduire le nombre de passages de la classe S à la classe I , pour cela on considère le modèle de type SIR contrôlé

$$\begin{cases} S'(t) = -u(t)\beta S(t)I(t) \\ I'(t) = u(t)\beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \end{cases} \quad (6)$$

avec les conditions initiales $S(0) = S_0, I(0) = I_0$ telles que $S_0 + I_0 \leq 1$. Ici le contrôle u modélise les interventions publiques sur le taux de transmission (type confinement). Lorsque $u = 1$ cela équivaut à aucune restriction, plus u prend de petites valeurs plus les mesures de confinement sont strictes.

Pour $T > 0, \alpha \in [0, 1[$ fixés, on cherchera u dans l'ensemble des contrôles admissibles $U_{\alpha, T}$ défini par

$$U_{\alpha, T} = \{u \in L^2([0, +\infty[), \alpha \leq u(t) \leq 1 \text{ si } t \in [0, T], u(t) = 1 \text{ si } t > T\}$$

La constante T caractérise la durée de l'intervention et α son intensité maximale.

Le théorème qui suit décrit les solutions du problème (6) qu'on peut obtenir en fonction des paramètres α .

Théorème 4.1 *Soit $\alpha \in [0, 1[$. Supposons $S_0 > S_{herd}$ et posons*

$$\bar{\alpha} = \frac{S_{herd}}{S_0 + I_0 - S_{herd}} \ln \left(\frac{S_0}{S_{herd}} \right)$$

- *Il n'existe pas de temps $T > 0$ et $u \in U_{\alpha, T}$ tels que la solution S de (6) associée à u vérifie*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_{herd}$$

- *Si $\alpha < \bar{\alpha}$, alors pour tout $0 < \varepsilon < S_{herd}$ il existe un $T > 0$ et $u \in U_{\alpha, T}$ tels que la solution S de (6) associée à u vérifie*

$$S_{herd} \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} S(t) \geq S_{herd} - \varepsilon$$

- *Si $\alpha > \bar{\alpha}$, alors pour tout $T > 0$ et $u \in U_{\alpha, T}$ la solution S de (6) associée à u vérifie*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} S^\alpha(t) \leq S_{herd}$$

où S^α désigne la solution de (6) associée à $u = \alpha$.

Autrement dit, ce théorème dit qu'aucun contrôle ne pourra stopper l'épidémie avant que le nombre de personne saine n'ait atteint le seuil d'immunité collective. Et que si on s'autorise un confinement suffisamment long et intense, on peut s'approcher arbitrairement près de ce seuil.

Ainsi, ce théorème nous suggère de considérer le problème de contrôle optimal suivant :

$$\sup_{u \in U_{\alpha, T}} S_{\infty}(u) \quad (\mathcal{P}_{\alpha, T})$$

où

$$S_{\infty}(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$$

avec (S, I) la solution du problème (6) associée u .

4.1 Résultats préliminaires

Les deux lemmes suivants sont à la base de la résolution du problème $(\mathcal{P}_{\alpha, T})$. Commençons par introduire la fonction $\Phi_{\xi} : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, définie pour tout $\xi > 0$ par

$$\Phi_{\xi}(S, I) = S + I - \frac{1}{\xi} \ln(S)$$

Lemme 4.2 *pour tout $u \in L^2([0, +\infty[, [0, 1])$ et tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a*

$$\frac{d}{dt} \Phi_{\xi}(S(t), I(t)) = \left(\frac{\beta}{\xi} u(t) - \gamma \right) I(t)$$

le long d'une trajectoire du système blabla. En particulier, si u est constante sur un intervalle non vide, alors la fonction $\Phi_{\mathcal{R}_0 u}(S(\cdot), I(\cdot))$ est constante sur ce même intervalle le long d'une trajectoire.

Preuve: Sur une trajectoire du système on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_{\xi}(S(t), I(t)) &= \frac{d}{dt} \left(S(t) + I(t) - \frac{1}{\xi} \ln(S(t)) \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\xi S(t)} \right) S'(t) + I'(t) \\ &= \left(\frac{\beta}{\xi} u(t) - \gamma \right) I(t) \end{aligned}$$

Et si u est constante sur un intervalle non vide, alors

$$\frac{d}{dt} \Phi_{\mathcal{R}_0 u}(S(t), I(t)) = \left(\frac{\beta}{\mathcal{R}_0 u} u - \gamma \right) I(t) = 0$$

donc $\Phi_{\mathcal{R}_0 u}(S(\cdot), I(\cdot))$ est constante sur ce même intervalle. \diamond

Le lemme précédent permet de montrer le résultat suivant, qui donne une caractérisation de $S_{\infty}(u)$.

Lemme 4.3 Soit $u \in U_{\alpha,T}$, pour toute trajectoire du système (6), la limite $S_\infty(u)$ existe, et est l'unique solution de l'équation

$$\Phi_{\mathcal{R}_0}(S_\infty, 0) = \Phi_{\mathcal{R}_0}(S(T), I(T))$$

sur l'intervalle $[0, 1/\mathcal{R}_0]$

Preuve: Soit $u \in U_{\alpha,T}$, comme $u(t) = 1$ si $t > T$, le lemme précédent implique que

$$\Phi_{\mathcal{R}_0}(S(T), I(T)) = \Phi_{\mathcal{R}_0}(S(t), I(t)) \quad \forall t > T$$

puisque $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = S_\infty(u)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$, et que $\Phi_{\mathcal{R}_0}$ est continue, en passant à la limite on obtient l'égalité

$$\Phi_{\mathcal{R}_0}(S_\infty, 0) = \Phi_{\mathcal{R}_0}(S(T), I(T))$$

Cette équation possède deux solutions, en effet la fonction $S \mapsto \Phi_{\mathcal{R}_0}(S, 0)$ est décroissante sur $[0, 1/\mathcal{R}_0]$ et croissante sur $[1/\mathcal{R}_0, +\infty[$ et tend vers $+\infty$ en 0 et en $+\infty$ avec un minimum en $S = \frac{1}{\mathcal{R}_0} = S_{\text{herd}}$. On conclut en notant que $S_\infty < S_{\text{herd}}$. \diamond

Reformulation du problème ($\mathcal{P}_{\alpha,T}$):

Finalement, puisque l'application $S \mapsto \Phi_{\mathcal{R}_0}(S, 0)$ est décroissante sur l'intervalle $[0, 1/\mathcal{R}_0]$, maximiser $S_\infty(u)$ est équivalent à minimiser $\Phi_{\mathcal{R}_0}(S_\infty, 0)$. Ainsi en utilisant le lemme précédent, on en déduit que le problème de contrôle optimal est équivalent au problème

$$\inf_{u \in U_{\alpha,T}} J(u) \quad (\mathcal{P}_{\alpha,T}^\Phi)$$

où

$$J(u) = \Phi_{\mathcal{R}_0}(S(T), I(T)) = \Phi_{\mathcal{R}_0}(S_0, I_0) + \gamma \int_0^T (u(t) - 1)I(t)dt$$

4.2 Résultats principaux

Le premier résultat obtenu permet de réduire l'étude problème à un problème d'optimisation en une dimension.

Théorème 4.4 Soit $\alpha \in [0, 1[$ et $T > 0$. Le problème ($\mathcal{P}_{\alpha,T}^\Phi$) admet une unique solution u^* . De plus, il existe un unique réel $T_0 \in [0, T[$ tel que $u^* = u_{T_0}$ où

$$u_{T_0} = \mathbf{1}_{[0, T_0]} + \alpha \mathbf{1}_{[T_0, T]} + \mathbf{1}_{[T, +\infty[}$$

La preuve de ce théorème est donnée dans [2] et utilise le principe du maximum.

D'après le théorème précédent, résoudre le problème ($\mathcal{P}_{\alpha,T}^\Phi$) équivaut à résoudre le problème

$$\sup_{T_0 \in [0, T[} S_\infty(u_{T_0}) \quad (\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha,T})$$

Le prochain résultat caractérise le temps T_0 optimal pour le problème $(\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha,T})$. Définissons la fonction $\psi : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\psi(T_0) = (1 - \alpha)\beta I^{T_0}(T) \int_{T_0}^T \frac{S^{T_0}(t)}{I^{T_0}(t)} dt - 1 \quad (7)$$

où (S^{T_0}, I^{T_0}) désigne la solution de (6) associée à u_{T_0} .

Théorème 4.5 *Soit $\alpha \in [0, 1[$, $T > 0$ et T_0^* la solution du problème $(\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha,T})$. La fonction ψ est décroissante sur $]0, T[$ et*

- si $\psi(0) \leq 0$, alors $T_0^* = 0$
- si $\psi(0) > 0$, alors T_0^* est l'unique solution sur $]0, T[$ de l'équation

$$\psi(T_0) = 0$$

Finalement, grâce au théorème (4.5) on se ramène à la résolution d'une équation en une dimension, ce qui simplifie considérablement le problème.

5 Aspect numériques

Dans cette section on décrit comment résoudre numériquement le problème de contrôle optimal ($\mathcal{P}_{\alpha,T}$). Pour toutes les applications numérique on utilisera les valeurs de paramètres donnés dans le tableau (1). Ces valeurs sont celles utilisées dans [2].

paramètre	valeur
β	0.29
γ	0.1
α	0.231
S_0	$1 - I_0$
I_0	1.49×10^{-5}
R_0	0
T	100

Table 1: valeurs des paramètres pour les simulations numériques

5.1 Avec GEKKO

GEKKO est une bibliothèque Python utilisée en machine learning et optimisation, en particulier elle permet de résoudre des problèmes de contrôle optimal.

La figure ci-dessous illustre comment résoudre le problème ($\mathcal{P}_{\alpha,T}^\Phi$) à l'aide de GEKKO.

```
# initialize gekko
m = GEKKO()
m.time = np.linspace(0,T,nt)

# Variables
S = m.Var(value=S0)
I = m.Var(value=I0)
x = m.Var(value=0)
u = m.Var(value=1,lb=alpha_conf,ub=1)
p = np.zeros(nt) # mark final time point
p[-1] = 1.0
final = m.Param(value=p)

# Equations
m.Equation(S.dt()==-beta*u*S*I)
m.Equation(I.dt()==beta*u*S*I-gamma*I)
m.Equation(x.dt()==gamma*(u-1)*I)

m.Obj(x*final) # Objective function
m.options.IMODE = 6 # optimal control mode
m.options.MAX_ITER = 2000 # adjust maximum iterations
m.solve(dispatch=False) # solve
```

Figure 4: Utilisation de GEKKO pour résoudre $(\mathcal{P}_{\alpha,T})$

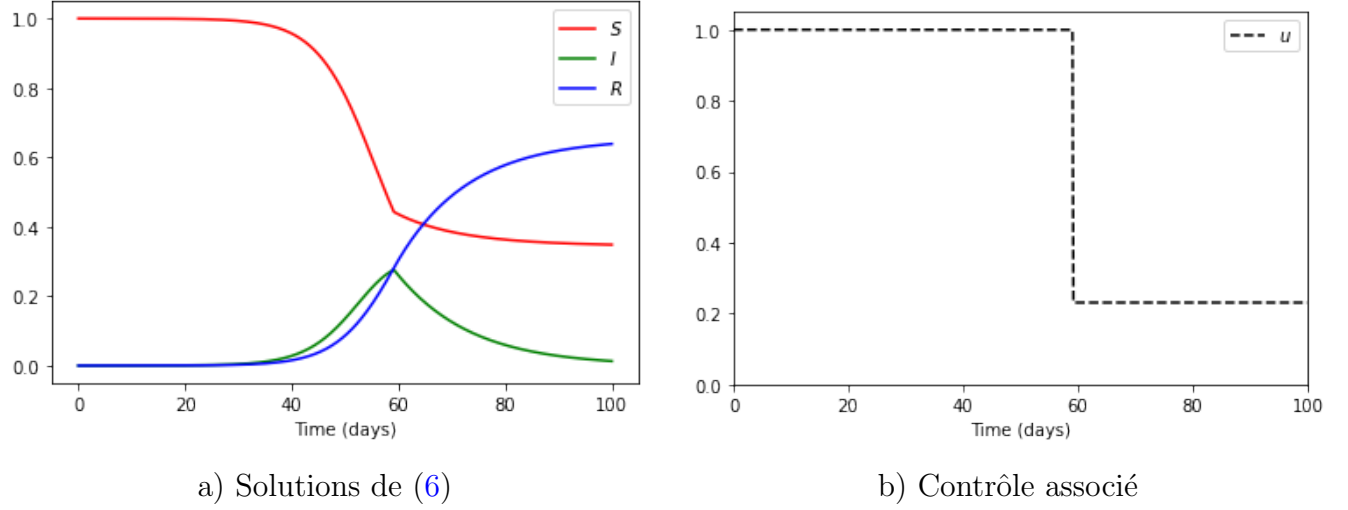


Figure 5: solution du problème $(\mathcal{P}_{\alpha,T})$ avec GEKKO

5.2 Avec une descente de gradient

On peut également résoudre le problème $(\mathcal{P}_{\alpha,T}^\Phi)$ en programmant tout nous même. On a choisi de résoudre le problème par une descente de gradient.

5.2.1 Calcul du gradient

Commençons par calculer la différentielle de la fonctionnelle J . On souhaite calculer le gradient de la fonctionnelle J définie par

$$J(u) = \gamma \int_0^T (u(t) - 1)I(t)dt$$

$$\begin{aligned} J(u + \varepsilon h) - J(u) &= \gamma \int_0^T (u + \varepsilon h - 1)I^{u+\varepsilon h} - \gamma \int_0^T (u - 1)I^u \\ &= \gamma \int_0^T (u - 1)(I^{u+\varepsilon h} - I^u) + \varepsilon h I^{u+\varepsilon h} \end{aligned}$$

donc en passant à la limite,

$$DJ(u).h = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{J(u + \varepsilon h) - J(u)}{\varepsilon} = \gamma \int_0^T (u - 1)\dot{I} + hI$$

où on a noté $\dot{I} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I^{u+\varepsilon h} - I^u}{\varepsilon}$. De même on notera $\dot{S} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S^{u+\varepsilon h} - S^u}{\varepsilon}$.

On obtient une expression inutilisable pour la différentielle de J puisqu'on ne sait pas calculer \dot{I} explicitement, mais le principe du maximum de Pontryaguin permet de la simplifier.

D'une part, en appliquant le théorème blabla au problème $(\mathcal{P}_{\alpha,T}^\Phi)$, on obtient qu'il existe deux fonctions (p_S, p_I) absolument continue qui vérifient le système différentiel

$$\begin{cases} p_I'(t) = -\beta I(t)u(t) (p_S(t) - p_I(t)) \\ p_S'(t) = \gamma (u(t) - 1) + \gamma p_I(t) + \beta I(t)u(t) (p_S(t) - p_I(t)) \\ p_S(T) = p_I(T) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

D'autre part, on montre que les fonctions \dot{S} et \dot{I} vérifient le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{I}'(t) = -\beta h I(t)S(t) - \beta u(t)\dot{I}(t)S(t) - \beta u(t)\dot{S}(t)I(t) \\ \dot{S}'(t) = \beta h I(t)S(t) + \beta u(t)\dot{I}(t)S(t) + \beta u(t)\dot{S}(t)I(t) - \gamma \dot{I}(t) \\ \dot{S}(0) = \dot{I}(0) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

On peut alors calculer de deux manières différentes la quantité $\int_0^T p_S \dot{S}' + p_I \dot{I}'$ à l'aide d'une intégration par partie. Cela nous conduit finalement à l'égalité suivante

$$\int_0^T \gamma \dot{I}(t) (u(t) - 1) dt = - \int_0^T \beta h S(t) I(t) (p_I(t) - p_S(t)) dt$$

et finalement on en déduit que

$$DJ(u).h = \int_0^T (\gamma - \beta S(t)I(t) (p_I(t) - p_S(t))) I(t)h(t)dt \quad (10)$$

donc que la gradient de J est donné par

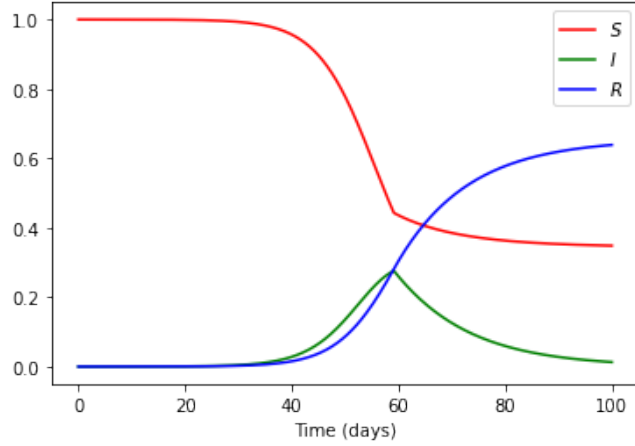
$$\nabla J(u) = (\gamma - \beta SI (p_I - p_S)) I$$

L'existence des états adjoints à ainsi permis de calculer explicitement le gradient de J .

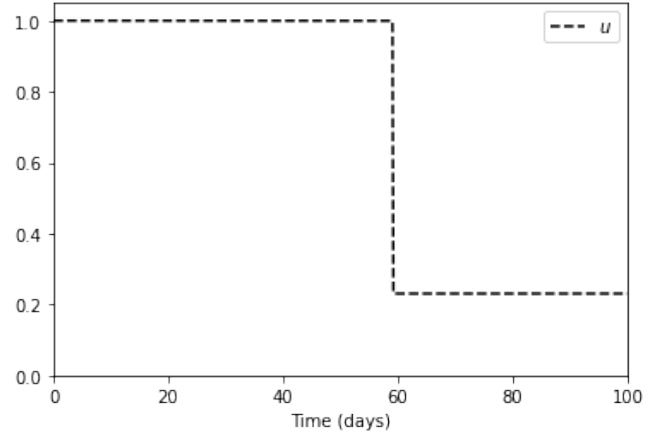
5.2.2 Implémentation

Comme vu précédemment, le gradient de J dépend de S et I mais aussi de p_S et p_I . Il faudra donc recalculer à chaque itération de l'algorithme les solutions du problème (6), puis celles du problème adjoint (8) (dans cet ordre). De plus, il ne faudra pas oublier de projeter le résultat sur l'espace des contrôle admissibles.

On a obtenu les même résultats qu'avec GEKKO sur nos simulations mais cette méthode est plus lente.



a) Solutions de (6)



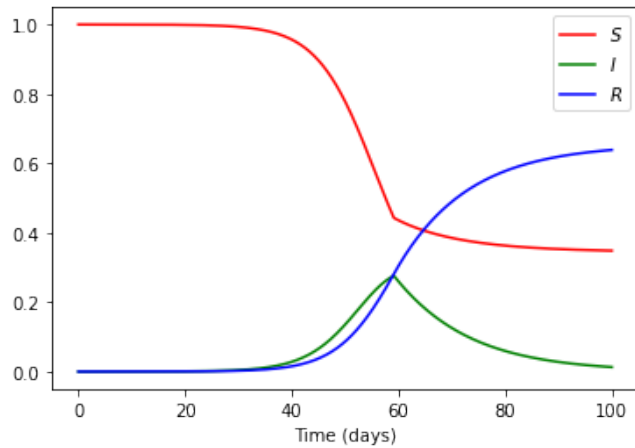
b) Contrôle associé

Figure 6: solution du problème $(\mathcal{P}_{\alpha,T})$ avec une descente de gradient

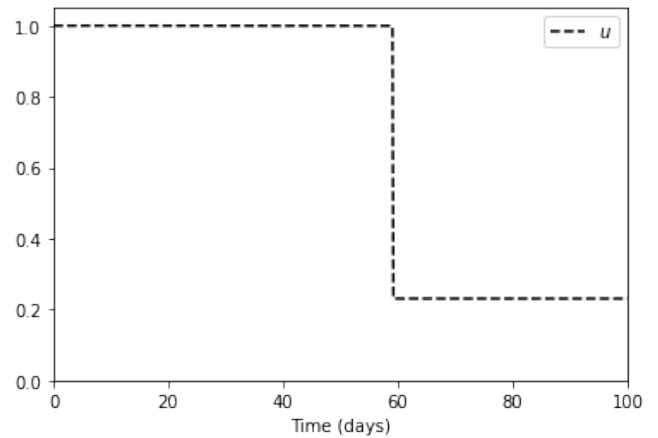
5.3 Par une dichotomie

Enfin, on peut tirer profit des résultats théorique de la section BLABLA, on va donc résoudre le problème $(\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha,T})$. Ce dernier étant beaucoup plus facile à implémenter que la descente de gradient puisqu'il est unidimensionnel.

Cette fois encore on retrouve les même résultats qu'avec GEKKO, cependant cet méthode est beaucoup plus rapide.



a) Solutions de (6)



b) Contrôle associé

Figure 7: solution du problème $(\tilde{\mathcal{P}}_{\alpha,T})$ par dichotomie

References

- [1] Logan Beal, Daniel Hill, R Martin, and John Hedengren. Gekko optimization suite. *Processes*, 6(8):106, 2018.
- [2] Pierre-Alexandre Bliman, Michel Duprez, Yannick Privat, and Nicolas Vauchelet. Optimal Immunity Control and Final Size Minimization by Social Distancing for the SIR Epidemic Model. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 189(2):408–436, 2021.
- [3] Marc Monticelli Corentin Bayette. Modélisation d’une épidémie, partie 1. *Images des Mathématiques*, 2020.
- [4] E.Trelat. Contrôle optimal : théorie et applications. *collection "mathématiques discrètes"*, 2005.