Calcul du champ magnétique
pour des géométries axisymétriques simples

Ch. Trophime

21 mars 2002

Dans ce document, nous allons établir l'expression des composantes magnétiques pour des inducteurs axisymétriques de forme simple. Les géométries traitées comprennent : la spire circulaire, le solénoïde plat ou disque, le solénoïde mince et le solénoïde épais.

Les densités de courants circulant dans les inducteurs sont supposées connues. La perméabilité magnétique μ est constante dans tout l'espace. Les matériaux utilisés sont supposés linéaires. Le champ magnétique $\mathbf{h}$ et l'induction magnétique $\mathbf{b}$ sont donc reliés par la relation $\mathbf{b} = \mu\mathbf{h}$.

Par convention, nous noterons les vecteurs en **gras**. Les coordonnées cylindriques d'un point $\mathbf{X}$ sont notées (r, θ, z).

Dans une première partie, nous rappellerons la loi de Biot-Savart qui permet d'exprimer l'induction magnétique $\mathbf{b}$ en tout point de l'espace en fonction de la densité de courant circulant dans l'inducteur. Puis à partir de cette loi, nous montrerons que $\mathbf{b}$ peut s'écrire simplement sous la forme d'intégrales elliptiques de première et deuxième espèce pour la spire circulaire. Les expressions de l'induction magnétique créée par des solénoïdes seront ensuite établies.

Table des matières

1 La loi de Biot-Savart

D'après les équations de Maxwell, l'induction magnétique $\mathbf{b}$ est solution du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\,\frac{1}{\mu}\mathbf{b} &= \mathbf{j} & (1)\\ \operatorname{div}\mathbf{b} &= 0. & (2) \end{aligned}$$

Le champ $\mathbf{b}$ étant à divergence nulle, on montre qu'il existe un unique $\mathbf{a}$ tel que

$$\mathbf{b} = \mathbf{rot}\,\mathbf{a} \qquad \text{et } \operatorname{div}\mathbf{a} = 0. \tag{3}$$

La loi d'Ampère (1) nous donne alors :

$$\mathbf{rot}\,\frac{1}{\mu}\mathbf{rot}\,\mathbf{a} = \mathbf{j}.$$

Soit encore puisque μ est constant dans tout $\mathbb{R}^3$:

$$-\Delta\mathbf{a} = \mu\,\mathbf{j}. \tag{4}$$

La solution de cette équation est donnée par la loi de Biot-Savart :

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \mu \int_{Support(\mathbf{j})} \mathbf{j}(\mathbf{Y})G(\mathbf{X},\mathbf{Y})d\Omega \qquad \forall\mathbf{X}\in\mathbb{R}^3, \tag{5}$$

où $G(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ désigne le noyau de Green $\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|}$.

De là on en déduit facilement l'induction magnétique $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b}(\mathbf{X}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{Support(\mathbf{j})} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{Y})\times(\mathbf{X}-\mathbf{Y})}{\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|^3}d\Omega \qquad \forall\mathbf{X}\in\mathbb{R}^3, \tag{6}$$

Il devient donc possible de calculer en tout point de $\mathbb{R}^3$ l'induction magnétique créée par un inducteur de géométrie quelconque si l'on connaît la densité de courant $\mathbf{j}$. Toutefois pour des géométries axisymétriques ces expressions peuvent se simplifier comme nous allons le voir dans les paragraphes suivants.

L'ensemble des résultats présentés dans la suite a déjà fait l'objet de publications. Citons entre autres Maxwell pour le calcul de la spire circulaire [4], Snow pour le solénoïde mince [2], Brown et Flax pour le solénoïde épais et plus récemment Hervé pour le disque [1]. Notons que dans ces deux derniers articles les auteurs ne considèrent que le cas de la distribution uniforme de densité de courant.

2 La spire circulaire

Soit $\mathcal{F}$ une spire circulaire de rayon a et de centre $(0,0,0)$ (en coordonnées cartésiennes) parcouru par un courant total I. Soit $\mathbf{Y}$ un point de $\mathcal{F}$ de coordonnées cylindriques $(a,\theta,0)$.

En raison de la symétrie de $\mathcal{F}$, les calculs de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ pourront être pour un point $\mathbf{X}$ de coordonnées cartésiennes $(r,0,z)$, i.e. un point du plan (Or,Oz). La distance de $\mathbf{X}$ au point courant $\mathbf{Y}$ est donnée par :

$$\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\| = \sqrt{z^2+r^2+a^2-2arcos\theta} \tag{7}$$

2.1 Calcul du potentiel vecteur magnétique

Le potentiel vecteur magnétique $\mathbf{a}$ créé par $\mathcal{F}$ est de la forme $\mathbf{a} = a(r,z)\mathbf{e}_\theta$ où $\mathbf{e}_\theta$ désigne le vecteur unitaire orthoradial. Par conséquent, en $\mathbf{X}$ la composante a_y de $\mathbf{a}$ suivant Oy sera donc égale à $a(r,z)$.

D'après (5), il vient donc :

$$a_y(\mathbf{X}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{\mathcal{F}} \frac{j_y(X)}{\sqrt{z^2+r^2+a^2-2arcos\theta}}\, a d\theta.$$

Soit

$$a(r,z) = \frac{\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{I\, a\, cos\theta}{\sqrt{z^2+r^2+a^2-2arcos\theta}}\, d\theta. \tag{8}$$

Posons $d_1^2 = (1+\frac{r}{a})^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2$ et $m^2 = \frac{4r}{ad_1^2}$. On montre alors facilement que :

$$a(r,z) = \frac{\mu I}{4\pi d_1}\int_0^{2\pi} \frac{cos\theta}{\sqrt{1-\frac{m^2}{2}(1+cos\theta)}}\, d\theta.$$

Effectuons le changement de variable $\theta = \pi - 2\nu$, il vient alors :

$$a(r,z) = -\frac{\mu I}{\pi}\frac{1}{d_1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2sin^2\nu}{\sqrt{1-m^2sin^2\nu}}\, d\nu.$$

Introduisons les intégrales elliptiques de première et deuxième espèce notées respectivement $K(m)$ et $E(m)$. Finalement on obtient :

$$\boxed{\begin{gathered} a(r,z) = \frac{\mu I}{\pi}\frac{1}{m^2 d_1}\left((2-m^2)K(m) - 2E(m)\right), \qquad (9) \\ \text{avec} \\ \begin{aligned} d_1^2 &= \left(1+\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2, \\ m^2 &= \frac{4r}{ad_1^2}. \end{aligned} \end{gathered}}$$

2.2 Calcul de l'induction magnétique

Un raisonnement similaire à celui conduit au paragraphe précédent nous permet de conclure que les composantes en coordonnées cartésiennes de l'induction magnétique $\mathbf{b}$ créée en $\mathbf{X}$ par $\mathcal{F}$ sont (b_r, b_θ, b_z). La composante orthoradiale b_θ de $\mathbf{b}$ doit être nulle par symétrie.

D'après (5), on obtient les expressions suivantes des composantes de **b** :

$$\begin{aligned}
b_r(r,z) &= \frac{\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Izcos\theta}{(z^2+r^2+a^2-2arcos\theta)^{\frac{3}{2}}}\, ad\theta &(10)\\
b_\theta(r,z) &= \frac{\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Izsin\theta}{(z^2+r^2+a^2-2arcos\theta)^{\frac{3}{2}}}\, ad\theta, &(11)\\
b_z(r,z) &= \frac{\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{I(a-rcos\theta)}{(z^2+r^2+a^2-2arcos\theta)^{\frac{3}{2}}}\, ad\theta. &(12)
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que b_θ est nul.
En introduisant d_1 et m, il vient après avoir effectué le changement de variable $\theta = \pi - 2\nu$ que :

$$\begin{aligned}
b_r(r,z) &= -\frac{\mu I}{\pi}\frac{z}{ad_1^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2sin^2\nu}{(1-m^2sin^2\nu)^{\frac{3}{2}}}\, d\nu,\\
b_z(r,z) &= -\frac{\mu I}{\pi}\frac{1}{ad_1^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\frac{m^2d_1^2}{4}(1-2sin^2\nu)}{(1-m^2sin^2\nu)^{\frac{3}{2}}}\, d\nu.
\end{aligned}$$

Calculons tout d'abord l'intégrale commune à ces deux équations :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2sin^2\nu}{(1-m^2sin^2\nu)^{\frac{3}{2}}}\, d\nu = \frac{2}{m^2}K(m) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m^2-2}{(1-m^2sin^2\nu)^{\frac{3}{2}}}\, d\nu$$

Or on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1-m^2sin^2\nu)^{\frac{3}{2}}}\, d\nu = \frac{1}{1-m^2}E(m).$$

D'où il vient :

$$\begin{aligned}
b_r(r,z) &= -\frac{\mu I}{\pi}\frac{z}{4rad_1}\left(2K(m) + \frac{m^2-2}{1-m^2}E(m)\right)\\
b_z(r,z) &= \frac{\mu I}{2\pi}\frac{1}{ad_1}\left(K(m) + \frac{1-(\frac{r}{a})^2-(\frac{z}{a})^2}{d_1^2}\,\frac{2}{1-m^2}E(m)\right)
\end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\begin{aligned}
b_r(r,z) &= \frac{\mu I}{2\pi}\frac{z}{rad_1}\left(-K(m) + \frac{1+(\frac{r}{a})^2+(\frac{z}{a})^2}{(1-\frac{r}{a})^2+(\frac{z}{a})^2}E(m)\right)\\
b_z(r,z) &= \frac{\mu I}{2\pi}\frac{1}{ad_1}\left(K(m) + \frac{1-(\frac{r}{a})^2-(\frac{z}{a})^2}{(1-\frac{r}{a})^2+(\frac{z}{a})^2}E(m)\right) \qquad (13)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
d_1^2 &= \left(1+\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2,\\
m^2 &= \frac{4r}{ad_1^2}.
\end{aligned}$$

3 Le solénoïde mince

Soit $\mathcal{S}$ un solénoïde d'épaisseur nulle de rayon a, de hauteur h centré en $(0, 0, 0)$ et d'axe Oz. La densité linéique de courant notée J le parcourant est supposée constante.

D'après la loi de Biot-Savart (5), l'induction magnétique $\mathbf{b}$ aura pour composantes en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} b_r(r,z) &= \frac{\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{J(z-l)cos\theta}{((z-l)^2+r^2+a^2-2arcos\theta)^{\frac{3}{2}}}\,ad\theta\,dl, && (14)\\ b_z(r,z) &= \frac{\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{J(a-rcos\theta)}{((z-l)^2+r^2+a^2-2arcos\theta)^{\frac{3}{2}}}\,ad\theta\,dl. && (15)\end{aligned}$$

La composante b_θ est nulle par symétrie.

On montre facilement que :

$$\begin{aligned} b_r(r,z) &= \frac{\mu J}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{a\,cos\theta}{\sqrt{(z-l)^2+r^2+a^2-2arcos\theta}}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} d\theta,\\ b_z(r,z) &= -\frac{\mu J}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{a-r\,cos\theta}{r^2-2arcos\theta+a^2}\frac{z-l}{\sqrt{(z-l)^2+r^2+a^2-2arcos\theta}}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} a\,d\theta.\end{aligned}$$

On remarque que b_r peut s'exprimer en terme d'intégrales elliptiques K et E comme nous l'avons vu précédemment. Pour cela nous posons :

$$\begin{aligned} d_1^2 &= \left(1+\frac{r}{a}\right)^2+\left(\frac{z-l}{a}\right)^2,\\ m^2 &= \frac{4r}{ad_1^2}.\end{aligned}$$

Il vient alors :

$$b_r(r,z) = \frac{\mu J}{\pi}\left[\frac{1}{m^2d_1}((2-m^2)K(m)-2E(m))\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}.$$

Calculons maintenant l'intégrale suivante :

$$F = \int_0^{2\pi}\frac{a-r\,cos\theta}{r^2-2arcos\theta+a^2}\frac{z-l}{\sqrt{(z-l)^2+r^2+a^2-2arcos\theta}}\,a\,d\theta. \tag{16}$$

Posons $\beta_0 = \frac{4r/a}{(1+r/a)^2}$. Puis effectuons le changement de variable suivant $\nu = \frac{\pi-\theta}{2}$. On obtient :

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\beta_0(z-l)}{2rd_1}(1+\frac{r}{a})\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-(1+\frac{r}{a})\frac{\beta_0}{2}sin^2\nu}{1-\beta_0 sin^2\nu}\frac{1}{\sqrt{1-m^2sin^2\nu}}\,d\nu,\\ &= -\frac{\beta_0(z-l)}{2rd_1}(1+\frac{r}{a})\left((1+\frac{r}{a})K(m)+(1-\frac{r}{a})\Pi(\beta_0,m)\right),\end{aligned}$$

où $\Pi(\beta_0, m)$ désigne l'intégrale elliptique de troisième espèce.

Soit

$$b_z(r,z) = -\frac{\mu J}{2\pi}\left[\frac{1}{d_1}\frac{z-l}{a}\left(K(m)+\frac{1-(\frac{r}{a})^2}{(1+\frac{r}{a})^2}\Pi(\beta_0,m)\right)\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}.$$

L'induction magnétique créée par $\mathcal{S}$ est donc de la forme :

$$\begin{aligned}
b_r(r,z) &= \frac{\mu J}{\pi}\left[\frac{1}{m^2 d_1}((2-m^2)K(m)-2E(m))\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}, \\
b_z(r,z) &= -\frac{\mu J}{2\pi}\left[\frac{1}{d_1}\frac{z-l}{a}\left(K(m)+\frac{1-(\frac{r}{a})^2}{(1+\frac{r}{a})^2}\Pi(\beta_0,m)\right)\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}.
\end{aligned} \tag{17}$$

avec

$$\begin{aligned}
d_1^2 &= \left(1+\frac{r}{a}\right)^2+\left(\frac{z-l}{a}\right)^2, \\
m^2 &= \frac{4r}{ad_1^2}, \\
\beta_0 &= \frac{4r/a}{(1+r/a)^2}.
\end{aligned}$$

4 Le disque

Soit $\mathcal{D}$ un disque d'épaisseur nulle de rayon interne a_0, de rayon externe a_1 centré en $(0,0,0)$. La densité linéique de courant est notée J.

D'après (5), les composantes de $\mathbf{b}$ sont données par :

$$b_r(r,z) = \frac{\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{a_0}^{a_1}\frac{Jzcos\theta}{(z^2+r^2+a^2-2arcos\theta)^{\frac{3}{2}}}\,ad\theta\,da, \tag{18}$$

$$b_z(r,z) = \frac{\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{a_0}^{a_1}\frac{J(a-rcos\theta)}{(z^2+r^2+a^2-2arcos\theta)^{\frac{3}{2}}}\,ad\theta\,da. \tag{19}$$

Nous allons développé ces expressions dans deux cas particuliers. Tout d'abord nous considérons le cas où J est uniforme. Puis nous traiterons le cas où J est inversement proportionnel à a.

4.1 Calculs préliminaires

Considérons les intégrales suivantes :

$$F_1 = \int_{a_0}^{a_1}\frac{a\,da}{(z^2+r^2+a^2-2arcos\theta)^{\frac{3}{2}}}, \tag{20}$$

$$G_0 = \int_{a_0}^{a_1}\frac{da}{\sqrt{z^2+r^2+a^2-2arcos\theta}}, \tag{21}$$

$$G_1 = \int_{a_0}^{a_1}\frac{da}{(z^2+r^2+a^2-2arcos\theta)^{\frac{3}{2}}}. \tag{22}$$

De manière évidente, on a :

$$F_1 = \left[\frac{-1}{\sqrt{r^2-2arcos\theta+a^2+z^2}}\right]_{a_0}^{a_1} + rcos\theta G_1. \tag{23}$$

Effectuons tout d'abord le changement de variable $u = \dfrac{a - rcos\theta}{\sqrt{r^2 sin^2\theta + z^2}}$. Il vient alors :

$$\begin{aligned} G_0 &= \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}, \\ G_1 &= \frac{1}{r^2 sin^2\theta + z^2} \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\frac{d}{du}\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right) = \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

on obtient :

$$G_0 = \left[arcsinh\left(\frac{a - rcos\theta}{\sqrt{r^2 sin^2\theta + z^2}}\right)\right]_{a_0}^{a_1}, \tag{24}$$

$$G_1 = \frac{1}{r^2 sin^2\theta + z^2}\left[\frac{a - rcos\theta}{\sqrt{r^2 - 2arcos\theta + a^2 + z^2}}\right]_{a_0}^{a_1}. \tag{25}$$

4.2 Distribution uniforme de J

A partir des expressions (23), (24) et (25), on montre que **b** s'écrit :

$$\begin{aligned} b_r(r,z) &= \frac{\mu J}{4\pi} z \int_0^{2\pi} \left(cos\theta \left[\frac{-1}{\sqrt{r^2 - 2arcos\theta + a^2 + z^2}}\right]_{a_0}^{a_1} + \frac{rcos^2\theta}{r^2 sin^2\theta + z^2}\left[\frac{a - rcos\theta}{\sqrt{r^2 - 2arcos\theta + a^2 + z^2}}\right]_{a_0}^{a_1}\right) d\theta, \\ b_z(r,z) &= \frac{\mu J}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\left[\frac{-a}{\sqrt{r^2 - 2arcos\theta + a^2 + z^2}}\right]_{a_0}^{a_1} + \left[arcsinh\left(\frac{a - rcos\theta}{\sqrt{r^2 sin^2\theta + z^2}}\right)\right]_{a_0}^{a_1}\right) d\theta. \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{r^2 - 2arcos\theta + a^2 + z^2}, \\ \rho^2 &= r^2 + z^2. \end{aligned} \tag{26}$$

Notons que b_r peut se mettre sous une forme plus simple :

$$b_r(r,z) = \frac{\mu J}{4\pi} z \left[-\frac{1}{r}\int_0^{2\pi} \frac{a}{R}\, d\theta + \frac{\rho^2}{r}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2 sin^2\theta + z^2}\,\frac{a - rcos\theta}{R}\, d\theta \right]_{a_0}^{a_1}.$$

Calculons l'intégrale suivante :

$$F = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2 sin^2\theta + z^2}\,\frac{a - rcos\theta}{\sqrt{r^2 - 2arcos\theta + a^2 + z^2}}\, d\theta. \tag{27}$$

En décomposant $\frac{1}{r^2 sin^2\theta + z^2}$ en fractions rationnelles, il vient :

$$F = \frac{1}{2\rho}\left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho - rcos\theta}\,\frac{a - rcos\theta}{R}\, d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho + rcos\theta}\,\frac{a - rcos\theta}{R}\, d\theta\right].$$

Introduisons m, d_1, β_1 et β_2 :

$$\begin{aligned}
d_1^2 &= \left(1+\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2, \\
m^2 &= \frac{4r}{a d_1^2}, \\
\beta_1 &= \frac{2r}{r+\rho}, \\
\beta_2 &= \frac{2r}{r-\rho}.
\end{aligned}$$

Alors :

$$F = \frac{2}{\rho\, a\, d_1}\left(+\frac{a-\rho}{r+\rho}\,\Pi(\beta_1, m) - \frac{a+\rho}{r-\rho}\,\Pi(\beta_2, m)\right).$$

Il devient alors possible d'exprimer b_r comme une somme d'intégrales elliptiques de première et troisième espèce :

$$b_r(r,z) = -\frac{\mu J}{2\pi} z \left[\frac{2}{d_1 r} K(m) - \frac{\rho}{r a d_1}\left(\frac{a-\rho}{r+\rho}\,\Pi(\beta_1, m) - \frac{a+\rho}{r-\rho}\,\Pi(\beta_2, m)\right)\right]_{a_0}^{a_1}.$$

De même, b_z peut s'écrire sous la forme :

$$b_z(r,z) = -\frac{\mu J}{2\pi}\left[\frac{2}{d_1} K(m) - \int_0^{\pi} arcsinh\left(\frac{a - r cos\theta}{\sqrt{r^2 sin^2\theta + z^2}}\right) d\theta\right]_{a_0}^{a_1}.$$

L'induction magnétique créée par $\mathcal{D}$ est donc de la forme :

$$\boxed{\begin{aligned}
b_r(r,z) &= -\frac{\mu J}{2\pi} z \left[\frac{2}{d_1 r} K(m) - \frac{\rho}{r a d_1}\left(\frac{a-\rho}{r+\rho}\,\Pi(\beta_1, m) - \frac{a+\rho}{r-\rho}\,\Pi(\beta_2, m)\right)\right]_{a_0}^{a_1}, \\
b_z(r,z) &= -\frac{\mu J}{2\pi}\left[\frac{2}{d_1} K(m) - \int_0^{\pi} arcsinh\left(\frac{a - r cos\theta}{\sqrt{r^2 sin^2\theta + z^2}}\right) d\theta\right]_{a_0}^{a_1}. \qquad (28)
\end{aligned}}$$

avec

$$\begin{aligned}
d_1^2 &= \left(1+\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2, \\
\rho^2 &= r^2 + z^2, \\
m^2 &= \frac{4r}{a d_1^2}, \\
\beta_1 &= \frac{2r}{r+\rho}, \\
\beta_2 &= \frac{2r}{r-\rho}. \qquad (29)
\end{aligned}$$

4.3 Distribution de Bitter $J = \frac{I}{a}$

De même dans le cas où $J = \frac{I}{a}$, les composantes de $\mathbf{b}$ s'obtiennent facilement d'après (23), (24) et (25) :

$$\begin{aligned} b_r(r,z) &= \frac{\mu I}{4\pi} z \int_0^{2\pi} \frac{cos\theta}{r^2 sin^2\theta + z^2} \left[\frac{a - rcos\theta}{\sqrt{r^2 - 2arcos\theta + a^2 + z^2}} \right]_{a_0}^{a_1} d\theta, \\ b_z(r,z) &= \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{-1}{\sqrt{r^2 - 2arcos\theta + a^2 + z^2}} \right]_{a_0}^{a_1} d\theta. \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale suivante :

$$F = \int_0^{2\pi} \frac{cos\theta}{r^2 sin^2\theta + z^2} \frac{a - rcos\theta}{\sqrt{r^2 - 2arcos\theta + a^2 + z^2}} d\theta. \tag{30}$$

Pour simplifier l'écriture, nous utilisons R et ρ vus au paragraphe précédent (cf. (26)).
En décomposant $\frac{cos\theta}{r^2 sin^2\theta + z^2}$ en fractions rationnelles, il vient :

$$F = \frac{1}{2r} \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho - rcos\theta} \frac{a - rcos\theta}{R} d\theta - \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho + rcos\theta} \frac{a - rcos\theta}{R} d\theta \right].$$

Soit encore en introduisant d_1, β_1 et β_2(cf. (29)) :

$$F = \frac{2}{r\,a\,d_1} \left(2K(m) + \frac{a-\rho}{r+\rho} \Pi(\beta_1, m) + \frac{a+\rho}{r-\rho} \Pi(\beta_2, m) \right).$$

Finalement nous pouvons maintenant exprimer b_r et b_z en termes d'intégrales elliptiques :

$$\begin{aligned} b_r(r,z) &= \frac{\mu I}{2\pi} z \left[\frac{1}{r\,a\,d_1} \left(2K(m) + \frac{a-\rho}{r+\rho} \Pi(\beta_1, m) + \frac{a+\rho}{r-\rho} \Pi(\beta_2, m) \right) \right]_{a_0}^{a_1}, \\ b_z(r,z) &= -\frac{\mu I}{\pi} \left[\frac{1}{a\,d_1} K(m) \right]_{a_0}^{a_1}. \end{aligned} \tag{31}$$

avec

$$\begin{aligned} d_1^2 &= \left(1 + \frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{z-l}{a}\right)^2, \\ \rho^2 &= r^2 + (z-l)^2, \\ m^2 &= \frac{4r}{ad_1^2}, \\ \beta_1 &= \frac{2r}{r+\rho}, \\ \beta_2 &= \frac{2r}{r-\rho}. \end{aligned}$$

5 Le solénoïde épais

Soit $\mathcal{C}$ un solénoïde de rayon interne a_0, de rayon externe a_1 et de hauteur h centré en $(0,0,0)$ et d'axe Oz. La densité surfacique de courant est notée J.

D'après (5), les composantes de **b** s'écrivent :

$$b_r(r,z) = \frac{\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{a_0}^{a_1}\frac{J(z-l)cos\theta}{((z-l)^2+r^2+a^2-2arcos\theta)^{\frac{3}{2}}}\,ad\theta\,da\,dl \tag{32}$$

$$b_z(r,z) = \frac{\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{a_0}^{a_1}\frac{J(a-rcos\theta)}{((z-l)^2+r^2+a^2-2arcos\theta)^{\frac{3}{2}}}\,ad\theta\,da\,dl. \tag{33}$$

5.1 Calculs préliminaires

Considérons les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
F_2 &= \int_{a_0}^{a_1}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{a\,da\,(z-l)\,dl}{((z-l)^2+r^2+a^2-2arcos\theta)^{\frac{3}{2}}},\\
G_2 &= \int_{a_0}^{a_1}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{dl\,(a-rcos\theta)a\,da}{((z-l)^2+r^2+a^2-2arcos\theta)^{\frac{3}{2}}},\\
F_3 &= \int_{a_0}^{a_1}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{da\,(z-l)\,dl}{((z-l)^2+r^2+a^2-2arcos\theta)^{\frac{3}{2}}},\\
G_3 &= \int_{a_0}^{a_1}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\frac{dl\,(a-rcos\theta)\,da}{((z-l)^2+r^2+a^2-2arcos\theta)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

En utilisant les intégrales introduites dans le paragraphe &4.1, on a :

$$\begin{aligned}
F_2 &= \int_{a_0}^{a_1}\left[\frac{a}{\sqrt{r^2-2arcos\theta+a^2+(z-l)^2}}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} da,\\
G_2 &= -\int_{a_0}^{a_1}\left[\frac{a(a-r\,cos\theta)}{r^2-2arcos\theta+a^2}\,\frac{z-l}{\sqrt{(z-l)^2+r^2+a^2-2arcos\theta}}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} da,\\
F_3 &= \int_{a_0}^{a_1}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2-2arcos\theta+a^2+(z-l)^2}}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} da,\\
G_3 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left[\frac{dl}{\sqrt{(z-l)^2+r^2+a^2-2arcos\theta}}\right]_{a_0}^{a_1}.
\end{aligned}$$

Soit encore en posant $R^2 = r^2 - 2arcos\theta + a^2 + (z-l)^2$:

$$F_2 = \left[[R]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \right]_{a_0}^{a_1} + rcos\theta \left[\left[arcsinh\left(\frac{a - rcos\theta}{\sqrt{r^2 sin^2\theta + z^2}} \right) \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \right]_{a_0}^{a_1}, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} G_2 &= -\left[\int_{a_0}^{a_1} \frac{z-l}{R} da + r(z-l)cos\theta \int_{a_0}^{a_1} \frac{(a - rcos\theta)\, da}{((a-rcos\theta)^2 + r^2 sin^2\theta)\, R} \right. \\ &\quad \left. - r^2(z-l)sin^2\theta \int_{a_0}^{a_1} \frac{da}{((a-rcos\theta)^2 + r^2 sin^2\theta)\, R} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}, \end{aligned}$$

$$F_3 = \left[\left[arcsinh\left(\frac{a - rcos\theta}{\sqrt{r^2 sin^2\theta + (z-l)^2}} \right) \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \right]_{a_0}^{a_1}, \tag{35}$$

$$G_3 = -\left[\left[arcsinh\left(\frac{l - z}{\sqrt{r^2 - 2arcos\theta + a^2}} \right) \right]_{-h/2}^{h/2} \right]_{a_0}^{a_1}. \tag{36}$$

Calculons maintenant chacune des intégrales intervenant dans l'expression de G_2. La première intégrale s'obtient aisément :

$$\int_{a_0}^{a_1} \frac{z-l}{R} da = (z-l) \left[arcsinh\left(\frac{a - rcos\theta}{\sqrt{r^2 sin^2\theta + (z-l)^2}} \right) \right]_{a_0}^{a_1}.$$

Pour calculer la deuxième intégrale, effectuons le changement de variable $u = (a - rcos\theta)^2 + r^2 sin^2\theta$. Il vient alors d'après Abramowitz (cf. eq. 3.3.30 [5]) :

$$\begin{aligned} \int_{a_0}^{a_1} \frac{a - rcos\theta}{((a-rcos\theta)^2 + r^2 sin^2\theta)\, R} da &= \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{u\sqrt{u + (z-l)^2}}, \\ &= \frac{1}{2|z-l|} \left[ln\left(\frac{R - |z-l|}{R + |z-l|} \right) \right]_{a_0}^{a_1}. \end{aligned}$$

Enfin en effectuant le changement de variable $u = a - rcos\theta$ on trouve pour la dernière intégrale (cf. eq. 3.3.49 [5]) :

$$\begin{aligned} \int_{a_0}^{a_1} \frac{1}{((a-rcos\theta)^2 + r^2 sin^2\theta)\, R} da &= \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{(u^2 + r^2 sin^2\theta)\sqrt{u^2 + r^2 sin^2\theta + (z-l)^2}}, \\ &= \frac{1}{r|sin\theta|\,|z-l|} \left[arctan\left(\frac{(a - rcos\theta)|z-l|}{r|sin\theta| R} \right) \right]_{a_0}^{a_1}. \end{aligned}$$

On obtient donc l'expression suivante de G_2 :

$$\begin{aligned} G_2 = &\left[\left[-(z-l)\, arcsinh\left(\frac{a - rcos\theta}{\sqrt{r^2 sin^2\theta + (z-l)^2}} \right) - \frac{z-l}{2|z-l|}\, rcos\theta\, ln\left(\frac{R - |z-l|}{R + |z-l|} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{z-l}{|z-l|}\, r|sin\theta|\, arctan\left(\frac{(a - rcos\theta)|z-l|}{r|sin\theta| R} \right) \right]_{-h/2}^{h/2} \right]_{a_0}^{a_1} \end{aligned} \tag{37}$$

5.2 Distribution uniforme de J

D'après (34) et (37), l'induction magnétique créée par $\mathcal{C}$ est de la forme :

$$\begin{aligned} b_r(r,z) &= \frac{\mu J}{2\pi}\left(\int_0^\pi cos\theta\left[\left[\sqrt{r^2-2arcos\theta+a^2+(z-l)^2}\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1} d\theta\right. \\ &\quad \left.+\int_0^\pi rcos^2\theta\left[\left[arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1} d\theta\right), \quad (38) \\ b_z(r,z) &= \frac{\mu J}{2\pi}\left(-\int_0^\pi \left[\left[(z-l)\,arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1} d\theta\right. \\ &\quad -\int_0^\pi rcos\theta\left[\left[\frac{(z-l)}{2|z-l|}ln\left(\frac{R-|z-l|}{R+|z-l|}\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1} d\theta \\ &\quad \left.+\int_0^\pi rsin\theta\left[\left[\frac{z-l}{|z-l|}\,arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{r|sin\theta|R}\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1} d\theta\right) \quad (39) \end{aligned}$$

Calculons l'intégrale :

$$F=\int_0^\pi cos\theta ln\left(\frac{R-|z-l|}{R+|z-l|}\right)d\theta.$$

Après intégration par parties, il vient :

$$F=-2r\int_0^\pi \frac{asin^2\theta}{(a^2-2arcos\theta+r^2)\ R}d\theta.$$

On en déduit l'expression de b_z :

$$\begin{aligned} b_z(r,z) &= \frac{\mu J}{2\pi}\left(-\int_0^\pi \left[\left[(z-l)\,arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1} d\theta\right. \\ &\quad +\int_0^\pi r^2\left[\left[(z-l)\frac{asin^2\theta}{(a^2-2arcos\theta+r^2)\ R}\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1} d\theta \\ &\quad \left.+\int_0^\pi rsin\theta\left[\left[\frac{z-l}{|z-l|}\,arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{r|sin\theta|R}\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1} d\theta\right). \quad (40) \end{aligned}$$

Les expressions de b_r et b_z trouvées sont similaires à celles obtenues par Brown et Flax [3] pour un solénoïde semi-infini. Notons que l'intégrale $H(r,z)$ définie par :

$$H(r,z)=\int_0^\pi arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+z^2}}\right)d\theta, \quad (41)$$

peut encore s'exprimer encore sous la forme :

$$
\begin{aligned}
H(r,z) &= \int_0^{\pi} ln\left(\frac{a-rcos\theta+R}{\sqrt{r^2sin^2\theta+z^2}}\right)d\theta,\\
&= \int_0^{\pi} ln\left(a-rcos\theta+R\right)d\theta-\int_0^{\pi}\left(ln\rho+\frac{1}{2}ln\left(1-\left(\frac{r}{\rho}\right)^2cos^2\theta\right)\right)d\theta,\\
&= \int_0^{\pi} ln\left(a-rcos\theta+R\right)d\theta-\pi ln\rho-\pi ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{r}{\rho}\right)^2}}{2}\right),\\
&= \int_0^{\pi} ln\left(a-rcos\theta+R\right)d\theta-\pi ln(\frac{|z|+\rho}{2}),\\
&= \int_0^{\pi} ln\left(\frac{2(a-rcos\theta+R)}{|z|+\rho}\right)d\theta. \qquad (42)
\end{aligned}
$$

On retrouve là la même expression de $H(r,z)$ que Brown et Flax. Hervé [1] montre que les formules de Brown et Flax peuvent encore s'écrire sous la forme d'une somme d'intégrales elliptiques complètes et de l'intégrale $H(r,z)$.

De même dans notre cas nous pouvons aussi exprimer b_r et b_z en termes d'intégrales elliptiques complètes et de $H(r,z)$. Considérons tout d'abord les deux intégrales de l'expression de b_r (38) :

$$
\begin{aligned}
F &= \int_0^{\pi} cos\theta\, R\, d\theta\\
G &= \int_0^{\pi} rcos^2\theta\, arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)d\theta,
\end{aligned}
$$

avec $R=\sqrt{r^2-2arcos\theta+a^2+(z-l)^2}$.
F s'obtient facilement par intégration par parties :

$$
\begin{aligned}
F &= \int_0^{\pi} cos\theta\, R\, d\theta,\\
&= -ar\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{R}+ar\int_0^{\pi}\frac{cos^2\theta\, d\theta}{R}.
\end{aligned}
$$

En remarquant que $cos2\theta=2cos^2\theta-1$, nous pouvons réécrire G sous la forme :

$$
\begin{aligned}
G &= \int_0^{\pi} rcos^2\theta\, arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)d\theta,\\
&= \frac{r}{2}\left(\int_0^{\pi} arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)d\theta+\int_0^{\pi} cos2\theta\, arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)d\theta\right).
\end{aligned}
$$

Soit encore en utilisant (42) et en intégrant par parties la deuxième intégrale du membre de droite :

$$
\begin{aligned}
G &= \frac{r}{2}\left(H(r,z-l)-\int_0^\pi \frac{sin\theta\, cos\theta}{R}\left(rsin\theta-\frac{r^2 sin\theta\, cos\theta\,(a-rcos\theta)}{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}\right)d\theta\right),\\
&= \frac{r}{2}\left(H(r,z-l)-\int_0^\pi \frac{rsin^2\theta\, cos\theta}{R}\,d\theta+\int_0^\pi \frac{r^2sin^2\theta\, cos^2\theta\,(a-rcos\theta)}{(r^2sin^2\theta+(z-l)^2)R}\,d\theta\right),\\
&= \frac{r}{2}\left(H(r,z-l)-\int_0^\pi \frac{r\, cos\theta\, d\theta}{R}-\int_0^\pi \frac{(z-l)^2cos^2\theta\,(a-rcos\theta)}{(r^2sin^2\theta+(z-l)^2)R}\,d\theta+\int_0^\pi \frac{acos^2\theta}{R}\,d\theta\right),\\
&= \frac{r}{2}\Bigg(H(r,z-l)+\left(\frac{z-l}{r}\right)^2\int_0^\pi \frac{a\,d\theta}{R}-\frac{\rho^2}{r}\int_0^\pi \frac{cos\theta\, d\theta}{R}+\int_0^\pi \frac{a\, cos^2\theta\, d\theta}{R}\\
&\qquad -(z-l)^2\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\int_0^\pi \frac{(a-rcos\theta)\,d\theta}{(r^2sin^2\theta+(z-l)^2)R}\Bigg),
\end{aligned}
\tag{43}
$$

avec $\rho=\sqrt{r^2+(z-l)^2}$.
En regroupant les expressions de F et G, il vient :

$$
\begin{aligned}
b_r(r,z) &= \frac{\mu J}{2\pi}\Bigg[\Bigg[\frac{r}{2}H(r,z-l)+\frac{(z-l)^2-2r^2}{2r}\int_0^\pi \frac{a\,d\theta}{R}-\frac{\rho^2}{2}\int_0^\pi \frac{cos\theta\, d\theta}{R}\\
&\qquad +\frac{3r}{2}\int_0^\pi \frac{a\, cos^2\theta\, d\theta}{R}-(z-l)^2\frac{\rho^2}{2r}\int_0^\pi \frac{(a-rcos\theta)\,d\theta}{(r^2sin^2\theta+(z-l)^2)R}\Bigg]_{-h/2}^{h/2}\Bigg]_{a_0}^{a_1}.
\end{aligned}
$$

Chacune des intégrales intervenant dans cette dernière expression s'exprime en fonction d'intégrales elliptiques complètes. En particulier, nous avons que (cf. eq(52) de [1] et (27)) :

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{a\, cos^2\theta\, d\theta}{R} &= \frac{2}{3d_1m^4}\left(-4(2-m^2)E(m)+(8(1-m^2)+3m^4)K(m)\right),\\
\int_0^\pi \frac{(a-rcos\theta)\,d\theta}{(r^2sin^2\theta+(z-l)^2)R} &= \frac{1}{\rho\, a\, d_1}\left(+\frac{a-\rho}{r+\rho}\,\Pi(\beta_1,m)-\frac{a+\rho}{r-\rho}\,\Pi(\beta_2,m)\right),
\end{aligned}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
d_1^2 &= \left(1+\frac{r}{a}\right)^2+\left(\frac{z-l}{a}\right)^2,\\
m^2 &= \frac{4r}{ad_1^2},\\
\beta_1 &= \frac{2r}{r+\rho},\\
\beta_2 &= \frac{2r}{r-\rho}.
\end{aligned}
$$

D'où il vient :

$$
\begin{aligned}
b_r(r,z) &= \frac{\mu J}{2\pi}\Bigg[\Bigg[\frac{r}{2}H(r,z-l)+\frac{(z-l)^2-2r^2}{rd_1}K(m)+\frac{\rho^2 d_1}{4r}\left(2E(m)-(2-m^2)K(m)\right)\\
&\qquad +\frac{r}{d_1m^4}\left(-4(2-m^2)E(m)+(8(1-m^2)+3m^4)K(m)\right)\\
&\qquad -(z-l)^2\frac{\rho}{2rad_1}\left(+\frac{a-\rho}{r+\rho}\,\Pi(\beta_1,m)-\frac{a+\rho}{r-\rho}\,\Pi(\beta_2,m)\right)\Bigg]_{-h/2}^{h/2}\Bigg]_{a_0}^{a_1}.
\end{aligned}
$$

Soit encore :

$$b_r(r,z) = \frac{\mu J}{2\pi}\left[\left[\frac{r}{2}H(r,z-l)-(z-l)^2\frac{\rho}{2rad_1}\left(+\frac{a-\rho}{r+\rho}\,\Pi(\beta_1,m)-\frac{a+\rho}{r-\rho}\,\Pi(\beta_2,m)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{a^2d_1}{2r}\left(E(m)-\frac{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2+3\left(\frac{z-l}{a}\right)^2}{d_1^2}K(m)\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1}.$$

Intéressons nous maintenant à l'expression de b_z (40) :

$$b_z(r,z) = \frac{\mu J}{2\pi}\left(-\int_0^\pi \left[\left[(z-l)\,arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1} d\theta\right.$$
$$+\int_0^\pi r^2\left[\left[(z-l)\frac{asin^2\theta}{(a^2-2arcos\theta+r^2)\;R}\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1} d\theta$$
$$\left.+\int_0^\pi rsin\theta\left[\left[\frac{z-l}{|z-l|}\,arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{r|sin\theta|R}\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1} d\theta\right).$$

D'après (42 et [1] (cf. eq(53)) nous avons les relations suivantes :

$$\int_0^\pi arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)d\theta = H(r,z-l), \tag{44}$$

$$\begin{aligned} r^2\int_0^\pi \frac{asin^2\theta}{(a^2-2arcos\theta+r^2)\;R}\,d\theta &= \frac{r\gamma}{2a}\int_0^\pi \frac{sin^2\theta}{(1-\gamma cos\theta)\;R}\,d\theta, \\ &= -\frac{d_1}{2}E(m)+\frac{2a^2+2r^2+(z-l)^2}{2a^2d_1}K(m)-\frac{(a-r)^2}{2a^2d_1}\Pi\left(\beta_0,m\right). \end{aligned} \tag{45}$$

Calculons la dernière intégrale intervenant dans (40) :

$$\int_0^\pi \frac{z-l}{|z-l|}\,rsin\theta\,arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{rsin\theta R}\right)d\theta = \left[-\frac{z-l}{|z-l|}\,rcos\theta arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{rsin\theta R}\right)\right]_0^\pi,$$
$$+\int_0^\pi \frac{z-l}{|z-l|}\,rcos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{rsin\theta R}\right)\right)d\theta.$$

Posons $f(r,z,\theta) = \left(arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{rsin\theta R}\right)\right)$. On montre que :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(r,z,\theta)}{\partial\theta} &= |z-l|\left[\frac{1}{R}+\frac{rcos\theta(a-rcos\theta)}{r^2sin^2\theta\, R}-\frac{a(a-rcos\theta)}{R^3}\right]\frac{r^2sin^2\theta R^2}{(r^2sin^2\theta+(z-l)^2)((a-rcos\theta)^2+r^2sin^2\theta)},\\
&= \frac{|z-l|}{R}\left[R^2(r^2-arcos\theta)-(a^2-rcos\theta)r^2sin^2\theta\right]\frac{1}{(r^2sin^2\theta+(z-l)^2)((a-rcos\theta)^2+r^2sin^2\theta)},\\
&= \frac{|z-l|}{R}\left[\frac{r^2-arcos\theta}{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}+\frac{r^2-arcos\theta}{(a-rcos\theta)^2+r^2sin^2\theta}-\frac{r^2sin^2\theta}{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}\right],\\
&= \frac{|z-l|}{R}\left[\frac{rcos\theta(rcos\theta-a)}{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}+\frac{r(r-acos\theta)}{a^2-2arcos\theta+r^2}\right],\\
&= \frac{|z-l|}{R}\left[-\frac{1}{2}+\frac{\rho^2}{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}-\frac{arcos\theta}{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}+\frac{r^2-a^2}{2(a^2-2arcos\theta+r^2)}\right].
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{z-l}{|z-l|}rcos\theta\frac{\partial f(r,z,\theta)}{\partial\theta} &= r(z-l)\left(-\frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{cos\theta\, d\theta}{R}+\rho^2\int_0^\pi\frac{cos\theta\, d\theta}{(r^2sin^2\theta+(z-l)^2)R}\right.\\
&\quad\left.-\int_0^\pi\frac{arcos^2\theta\, d\theta}{(r^2sin^2\theta+(z-l)^2)R}+\frac{r^2-a^2}{2}\int_0^\pi\frac{cos\theta\, d\theta}{(a^2-2arcos\theta+r^2)\, R}\right),\\
&= r(z-l)\left(-\frac{r^2-a^2}{4ar}\int_0^\pi\frac{d\theta}{R}-\frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{cos\theta\, d\theta}{R}\right.\\
&\quad+\frac{\rho^2}{2r}\int_0^\pi\left(-\int_0^\pi\frac{d\theta}{(\rho+rcos\theta)R}+\int_0^\pi\frac{d\theta}{(\rho-rcos\theta)R}\right)\\
&\quad-\frac{1}{2}\left(-\int_0^\pi\frac{a\,cos\theta\, d\theta}{(\rho+rcos\theta)R}+\int_0^\pi\frac{a\,cos\theta\, d\theta}{(\rho-rcos\theta)R}\right)\\
&\quad\left.+\frac{(r^2-a^2)(r^2+a^2)}{4ar}\int_0^\pi\frac{d\theta}{(a^2-2arcos\theta+r^2)\, R}\right),\\
&= r(z-l)\left(-\frac{r^2-5a^2}{4ar}\int_0^\pi\frac{d\theta}{R}-\frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{cos\theta\, d\theta}{R}\right.\\
&\quad+\frac{\rho}{2r}\left(\int_0^\pi\frac{(\rho+a)\, d\theta}{(\rho+rcos\theta)R}-\int_0^\pi\frac{(\rho-a)\, d\theta}{(\rho-rcos\theta)R}\right)\\
&\quad\left.+\frac{(r^2-a^2)(r^2+a^2)}{4ar}\int_0^\pi\frac{d\theta}{(a^2-2arcos\theta+r^2)\, R}\right).
\end{aligned}$$

Or nous avons déjà vu que :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi\frac{d\theta}{R} &= \frac{2}{ad_1}K(m),\\
\int_0^\pi\frac{cos\theta\, d\theta}{R} &= -\frac{d_1}{2r}\left(2E(m)-(2-m^2)K(m)\right),\\
\int_0^\pi\frac{d\theta}{(1-\gamma cos\theta)R} &= \frac{2}{(1+\gamma)ad_1}\Pi(\frac{2\gamma}{1+\gamma},m).
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int_0^{\pi} \frac{z-l}{|z-l|} rcos\theta \frac{\partial f(r,z,\theta)}{\partial \theta} = (z-l)\left(\left(\frac{4a^2-2r^2-(z-l)^2}{2a^2d_1}\right)K(m)+\frac{d_1}{2}E(m)\right. \tag{46}$$

$$-\frac{\rho}{ad_1}\left(-\frac{\rho-a}{\rho+r}\Pi(\beta_1,m)+\frac{\rho+a}{\rho-r}\Pi(\beta_2,m)\right)$$

$$\left.+\frac{a^2+r^2}{2a^2d_1}\frac{r-a}{r+a}\Pi(\beta_0,m)\right). \tag{47}$$

En regroupant les termes de (46), (45) et (44), on obtient pour b_z d'après (40) :

$$b_z(r,z) = \frac{\mu J}{2\pi}\left[\left[(z-l)\left(-H(r,z-l)+\frac{3}{d_1}K(m)+\frac{1}{d_1}\frac{r-a}{r+a}\Pi\left(\beta_0,m\right)\right.\right.\right.$$

$$-\frac{\rho}{ad_1}\left(-\frac{\rho-a}{\rho+r}\Pi(\beta_1,m)+\frac{\rho+a}{\rho-r}\Pi(\beta_2,m)\right)$$

$$\left.\left.\left.+\left[-\frac{z-l}{|z-l|}rcos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}f(r,z,\theta)\right]_0^{\pi}\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1}$$

Il reste encore à déterminer la valeur de $\left[-\frac{z-l}{|z-l|}rcos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}f(r,z,\theta)\right]_0^{\pi}$. Pour cela, nous allons étudier la limite de $f(r,z,\theta)$ pour $\theta=0$ et $\theta=\pi$.
En dehors du cas $r=a$, il est clair que :

$$\lim_{\theta\to\pi} f(r,z,\theta) = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{\theta\to 0} f(r,z,\theta) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si } r<a, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } r>a. \end{cases}$$

Dans le cas où $a=r$:

$$f(r,z,\theta)=\frac{a(1-cos\theta)|z-l|}{rsin\theta\, R}$$

Donc on a :

$$\lim_{\theta\to\pi} f(r,z,\theta)=\frac{\pi}{2}$$

et en appliquant la règle de L'Hospital pour déterminer la limite de $\frac{(a-rcos\theta)\,|z-l|}{rsin\theta R}$ pour $\theta=0$ on obtient :

$$\lim_{\theta\to 0} f(r,z,\theta)=0.$$

Introduisons la fonction $sgn(x)$ définie par :

$$sgn(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<0, \\ 0 & \text{si } x=0, \\ 1 & \text{si } x>0. \end{cases} \tag{48}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\left[-\frac{z-l}{|z-l|}rcos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}f(r,z,\theta)\right]_0^{\pi}=r\frac{\pi}{2}(1+sgn(a-r))\frac{z-l}{|z-l|}. \tag{49}$$

Finalement on obtient pour b_z :

$$b_z(r,z) = \frac{\mu J}{2\pi}\left[\left[(z-l)\left(-H(r,z-l)+\frac{3}{d_1}K(m)+\frac{1}{d_1}\frac{r-a}{r+a}\Pi\left(\beta_0,m\right)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{\rho}{ad_1}\left(-\frac{\rho-a}{\rho+r}\Pi(\beta_1,m)+\frac{\rho+a}{\rho-r}\Pi(\beta_2,m)\right)+\frac{\pi}{2}(1+sgn(a-r))\frac{r}{|z-l|}\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1}.$$

$$\begin{aligned}
b_r(r,z) &= \frac{\mu J}{2\pi}\left[\left[\frac{r}{2}H(r,z-l)-(z-l)^2\frac{\rho}{2rad_1}\left(+\frac{a-\rho}{r+\rho}\Pi(\beta_1,m)-\frac{a+\rho}{r-\rho}\Pi(\beta_2,m)\right)\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{a^2d_1}{2r}\left(E(m)-\frac{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2+3\left(\frac{z-l}{a}\right)^2}{d_1^2}K(m)\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1}, \qquad (50)\\
b_z(r,z) &= \frac{\mu J}{2\pi}\left[\left[(z-l)\left(-H(r,z-l)+\frac{3}{d_1}K(m)+\frac{1}{d_1}\frac{r-a}{r+a}\Pi\left(\beta_0,m\right)\right.\right.\right.\\
&-\frac{\rho}{ad_1}\left(-\frac{\rho-a}{\rho+r}\Pi(\beta_1,m)+\frac{\rho+a}{\rho-r}\Pi(\beta_2,m)\right)\\
&\left.\left.\left.+\frac{\pi}{2}(1+sgn(a-r))\frac{r}{|z-l|}\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1}.
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
d_1^2 &= \left(1+\frac{r}{a}\right)^2+\left(\frac{z-l}{a}\right)^2,\\
m^2 &= \frac{4r}{ad_1^2},\\
\rho &= \sqrt{r^2+(z-l)^2},\\
\beta_0 &= \frac{4ra}{(r+a)^2},\\
\beta_1 &= \frac{2r}{r+\rho},\\
\beta_2 &= \frac{2r}{r-\rho}.
\end{aligned}$$

5.3 Distribution de Bitter $J = \frac{I}{h\,a}$

Les expressions des intégrales F_3 et G_3, respectivement (35) et (36), nous permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned}
b_r(r,z) &= \frac{\mu I}{4\pi\,h}\int_0^{2\pi} cos\theta\left[\left[arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1} d\theta,\\
b_z(r,z) &= -\frac{\mu I}{4\pi\,h}\int_0^{2\pi}\left[\left[arcsinh\left(\frac{l-z}{\sqrt{r^2-2arcos\theta+a^2}}\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1} d\theta. \qquad (51)
\end{aligned}$$

Calculons l'intégrale :

$$F=\int_0^{2\pi} cos\theta\, arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)\,d\theta. \tag{52}$$

Intégrons F par parties. Il vient :

$$\begin{aligned}
F &= -\int_0^{2\pi} sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)\right)\,d\theta,\\
&= -\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-arcos\theta}{rR}\,d\theta+\frac{(z-l)^2}{r}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-arcos\theta}{(r^2sin^2\theta+(z-l)^2)\,R}\,d\theta,\\
&= -\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2-arcos\theta}{rR}\,d\theta+\frac{(z-l)^2}{2r}\left(-\int_0^{2\pi}\frac{a-\rho}{\rho-rcos\theta}\,\frac{d\theta}{R}+\int_0^{2\pi}\frac{a+\rho}{\rho+rcos\theta}\,\frac{d\theta}{R}\right)
\end{aligned} \tag{53}$$

avec

$$\begin{aligned}
R &= \sqrt{a^2+r^2-2arcos\theta+(z-l)^2},\\
\rho &= \sqrt{r^2+(z-l)^2}.
\end{aligned}$$

On peut alors exprimer F en termes d'intégrales elliptiques :

$$F=\left(-\frac{4\rho^2}{ad_1r}+\frac{(2-m^2)ad_1}{r}\right)K(m)-\frac{2ad_1}{r}E(m)-\frac{2(z-l)^2}{ard_1}\left(\frac{a-\rho}{r+\rho}\,\Pi(\beta_1,m)+\frac{a+\rho}{r-\rho}\,\Pi(\beta_2,m)\right).$$

D'où l'expression de l'induction magnétique :

$$b_r(r,z) = -\frac{\mu I}{4\pi\,h}\Bigg[\Bigg[\left(\frac{4\rho^2}{ad_1r}-\frac{(2-m^2)ad_1}{r}\right)K(m)+\frac{2ad_1}{r}E(m) \tag{54}$$

$$+\frac{2(z-l)^2}{ard_1}\left(\frac{a-\rho}{r+\rho}\,\Pi(\beta_1,m)+\frac{a+\rho}{r-\rho}\,\Pi(\beta_2,m)\right)\Bigg]_{-h/2}^{h/2}\Bigg]_{a_0}^{a_1}, \tag{55}$$

$$b_z(r,z) = -\frac{\mu I}{4\pi\,h}\int_0^{2\pi}\left[\left[arcsinh\left(\frac{l-z}{\sqrt{r^2-2arcos\theta+a^2}}\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]_{a_0}^{a_1}d\theta. \tag{56}$$

avec

$$\begin{aligned}
d_1^2 &= \left(1+\frac{r}{a}\right)^2+\left(\frac{z-l}{a}\right)^2,\\
m^2 &= \frac{4r}{ad_1^2},\\
\rho &= \sqrt{r^2+(z-l)^2},\\
\beta_1 &= \frac{2r}{r+\rho},\\
\beta_2 &= \frac{2r}{r-\rho}.
\end{aligned}$$

Notons que l'intégrale $H_1(r,z)$ définie par :

$$H_1(r,z)=\int_0^{\pi} arcsinh\left(\frac{z}{\sqrt{r^2-2arcos\theta+a^2}}\right)\,d\theta, \tag{57}$$

peut encore s'exprimer encore sous la forme :

$$
\begin{aligned}
H_1(r,z) &= \int_0^{\pi} ln\left(\frac{z+R}{\sqrt{r^2-2arcos\theta+a^2}}\right) d\theta, \\
&= \int_0^{\pi} ln\,(z+R)\; d\theta - \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\, ln\left(r^2-2arcos\theta+a^2\right)\, d\theta, \\
&= \int_0^{\pi} ln\,(z+R)\; d\theta - \pi lna - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} ln\left(1-2\frac{r}{a}cos\theta+\left(\frac{r}{a}\right)^2\right) d\theta.
\end{aligned}
$$

Or on a :

$$
\int_0^{\pi} ln\left(1-2\frac{r}{a}cos\theta+\left(\frac{r}{a}\right)^2\right) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } r \le a, \\ 2\pi ln\frac{r}{a} & \text{si } r > a. \end{cases} \tag{58}
$$

On retrouve donc bien pour b_z l'expression donnée dans votre document puisque la "constante" (i.e. $\pi\, lnr$ si $r > a$) apparaissant dans H_1 disparaît avec les brackets.

6 Calcul du potentiel magnétique vecteur

Dans ce paragraphe nous allons revenir sur le calcul du potentiel vecteur **a** pour le solénoïde mince, le disque et le solénoïde épais. Nous rappelons que par symétrie **a** n'a qu'une composante non nulle en coordonnées cylindriques, à savoir a_θ.

6.1 Le solénoïde mince $\mathcal{S}$

L'expression du potentiel magnétique vecteur a_θ est donnée par :

$$
a_\theta(r,z) = \frac{\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{J\, a\, cos\theta}{\sqrt{(z-l)^2+r^2+a^2-2arcos\theta}}\, dl\, d\theta. \tag{59}
$$

Après intégration sur l, on obtient dans le cas où J est constant :

$$
a_\theta(r,z) = \frac{\mu J}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} a\, cos\theta\, arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right) d\theta\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}},
$$

avec $R = \sqrt{z^2+r^2+a^2-2arcos\theta}$.
Calculons maintenant l'intégrale suivante :

$$
F = \int_0^{\pi} a\, cos\theta\, arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right) d\theta.
$$

Intégrons F par parties. Alors il vient d'après [1] (cf. eq (53)) :

$$
\begin{aligned}
F &= -(z-l)\int_0^{\pi} \frac{rsin^2\theta}{\left(1-2\frac{r}{a}cos\theta+\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)R}\, d\theta, \\
&= -(z-l)\frac{r}{1+\left(\frac{r}{a}\right)^2}\int_0^{\pi}\frac{sin^2\theta}{(1-\gamma cos\theta)\,R}\, d\theta, \\
&= (z-l)\left(+\frac{ad_1}{2r}E(m) - \frac{2a^2+2r^2+(z-l)^2}{2rad_1}K(m) + \frac{(a-r)^2}{2rad_1}\Pi\left(\beta_0,m\right)\right),
\end{aligned} \tag{60}
$$

avec

$$\begin{aligned}
d_1^2 &= \left(1+\frac{r}{a}\right)^2+\left(\frac{z-l}{a}\right)^2, \\
m^2 &= \frac{4r}{ad_1^2}, \\
\rho &= \sqrt{r^2+(z-l)^2}, \\
\beta_0 &= \frac{4ra}{(r+a)^2},
\end{aligned}$$

Le potentiel vecteur $(0, a_\theta, 0)$ créé par $\mathcal{S}$ sera donc de la forme :

$$a_\theta(r,z) = \frac{\mu J}{2\pi}\left[(z-l)\left(\frac{ad_1}{2r}E(m) - \frac{2a^2+2r^2+(z-l)^2}{2rad_1}K(m) + \frac{(a-r)^2}{2rad_1}\Pi\left(\beta_0, m\right)\right)\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}, \quad (61)$$

avec

$$\begin{aligned}
d_1^2 &= \left(1+\frac{r}{a}\right)^2+\left(\frac{z-l}{a}\right)^2, \\
m^2 &= \frac{4r}{ad_1^2}, \\
\rho &= \sqrt{r^2+(z-l)^2}, \\
\beta_0 &= \frac{4ra}{(r+a)^2}.
\end{aligned}$$

6.2 Le disque $\mathcal{D}$

L'expression du potentiel magnétique vecteur a_θ est donnée par :

$$a_\theta(r,z) = \frac{\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{a_0}^{a_1}\frac{J\,a\,cos\theta}{\sqrt{z^2+r^2+a^2-2arcos\theta}}\,da\,d\theta. \quad (62)$$

Pour simplifier les calculs, posons $R = \sqrt{z^2+r^2+a^2-2arcos\theta}$.

6.2.1 Distribution uniforme

Dans le cas où la distribution de densité de courant J est uniforme, on montre que :

$$a_\theta(r,z) = \frac{\mu J}{2\pi}\left[\int_0^\pi cos\theta R\,d\theta + \int_0^\pi rcos^2\theta\,arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+z^2}}\right)d\theta\right]_{a_0}^{a_1}.$$

On retrouve là l'intégrale intervenant dans l'expression de b_r pour un solénoïde épais parcouru par une distribution de densité de courant uniforme. D'où :

$$\begin{aligned} a_\theta(r,z) &= \frac{\mu J}{2\pi}\left[\frac{r}{2}H(r,z-l) - z^2\frac{\rho}{2rad_1}\left(+\frac{a-\rho}{r+\rho}\,\Pi(\beta_1,m) - \frac{a+\rho}{r-\rho}\,\Pi(\beta_2,m)\right)\right. \\ &\qquad \left. -\frac{a^2d_1}{2r}\left(E(m) - \frac{1-\left(\frac{r}{a}\right)^2+3\left(\frac{z}{a}\right)^2}{d_1^2}K(m)\right)\right]_{a_0}^{a_1}, \end{aligned} \tag{63}$$

avec

$$\begin{aligned} d_1^2 &= \left(1+\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2, \\ m^2 &= \frac{4r}{ad_1^2}, \\ \rho &= \sqrt{r^2+z^2}, \\ \beta_1 &= \frac{2r}{r+\rho}, \\ \beta_2 &= \frac{2r}{r-\rho}. \end{aligned}$$

6.2.2 Distribution de Bitter

Dans le cas où la distribution de densité de courant J est en I/a, on a :

$$a_\theta(r,z) = \frac{\mu I}{2\pi}\left[\int_0^\pi cos\theta\, arcsinh\left(\frac{a - rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+z^2}}\right)d\theta\right]_{a_0}^{a_1}.$$

On retrouve cette fois l'intégrale intervenant dans l'expression de b_r pour un solénoïde épais parcouru par une distribution de bitter. Donc :

$$\begin{aligned} a_\theta(r,z) &= -\frac{\mu I}{4\pi}\left[\left(\frac{4\rho^2}{ad_1r} - \frac{(2-m^2)ad_1}{r}\right)K(m) + \frac{2ad_1}{r}E(m)\right. \\ &\qquad \left. +\frac{2z^2}{ard_1}\left(\frac{a-\rho}{r+\rho}\,\Pi(\beta_1,m) + \frac{a+\rho}{r-\rho}\,\Pi(\beta_2,m)\right)\right]_{a_0}^{a_1}, \end{aligned} \tag{64}$$

avec

$$\begin{aligned} d_1^2 &= \left(1+\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2, \\ m^2 &= \frac{4r}{ad_1^2}, \\ \rho &= \sqrt{r^2+z^2}, \\ \beta_1 &= \frac{2r}{r+\rho}, \\ \beta_2 &= \frac{2r}{r-\rho}. \end{aligned}$$

6.3 Le solénoïde épais $\mathcal{C}$

L'expression du potentiel magnétique vecteur a_θ est donnée par :

$$a_\theta(r,z) = \frac{\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{a_0}^{a_1}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{J\,a\,cos\theta}{\sqrt{(z-l)^2+r^2+a^2-2arcos\theta}}\,da\,dl\,d\theta. \tag{65}$$

De même que dans le paragraphe précédent pour faciliter la lecture, nous introduisons :

$$R = \sqrt{(z-l)^2+r^2+a^2-2arcos\theta}. \tag{66}$$

6.3.1 Distribution uniforme

Pour une distribution de courant uniforme J, a_θ est donné par la relation suivante obtenue après intégration de (65) par rapport à l :

$$a_\theta(r,z) = -\frac{\mu J}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\int_{a_0}^{a_1} a\,cos\theta\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)da\,d\theta\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}.$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} a_\theta(r,z) &= -\frac{\mu J}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\int_{a_0}^{a_1}(a\,-rcos\theta)\,cos\theta\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)da\,d\theta\right. \\ &\qquad\left.+\int_0^{\pi}\int_{a_0}^{a_1} rcos^2\theta\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)da\,d\theta\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}. \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned} F1 &= \int_{a_0}^{a_1}(a\,-rcos\theta)\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)da, \\ F2 &= \int_{a_0}^{a_1} arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)da. \end{aligned}$$

Après intégration par parties, il vient :

$$\begin{aligned} F1 &= \left[\frac{1}{2}(a-rcos\theta)^2\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)\right]_{a_0}^{a_1} + \frac{z-l}{2}\int_{a_0}^{a_1}\frac{(a-rcos\theta)^3}{a^2-2arcos\theta+r^2}\frac{da}{R}, \\ &= \left[\frac{1}{2}(a-rcos\theta)^2\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)\right]_{a_0}^{a_1} + \frac{z-l}{2}\int_{a_0}^{a_1}(a-rcos\theta)\frac{da}{R} \\ &\qquad -\frac{z-l}{2}r^2sin^2\theta\int_{a_0}^{a_1}\frac{a-rcos\theta}{a^2-2arcos\theta+r^2}\frac{da}{R}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F2 &= \left[(a-rcos\theta)\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)\right]_{a_0}^{a_1} + (z-l)\int_{a_0}^{a_1}\frac{(a-rcos\theta)^2}{a^2-2arcos\theta+r^2}\frac{da}{R}, \\ &= \left[(a-rcos\theta)\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)\right]_{a_0}^{a_1} + (z-l)\int_{a_0}^{a_1}\frac{da}{R} \\ &\qquad -(z-l)r^2sin^2\theta\int_{a_0}^{a_1}\frac{da}{((a-rcos\theta)^2+r^2sin^2\theta)R}. \end{aligned}$$

Or on a vu que (cf. eq. 3.3.30 et eq. 3.3.49 [5])) :

$$\begin{aligned}
\int_{a_0}^{a_1} \frac{a-rcos\theta}{((a-rcos\theta)^2+r^2sin^2\theta)\,R}\,da &= \frac{1}{2|z-l|}\left[ln\left(\frac{R-|z-l|}{R+|z-l|}\right)\right]_{a_0}^{a_1},\\
\int_{a_0}^{a_1} \frac{1}{((a-rcos\theta)^2+r^2sin^2\theta)\,R}\,da &= \frac{1}{r|sin\theta|\,|z-l|}\left[arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{r|sin\theta|R}\right)\right]_{a_0}^{a_1}.
\end{aligned}$$

Donc on en déduit :

$$\begin{aligned}
F1 &= \frac{1}{2}\left[(a-rcos\theta)^2\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{z-l}{2}R-\frac{z-l}{4|z-l|}r^2sin^2\theta\,ln\left(\frac{R-|z-l|}{R+|z-l|}\right)\right]_{a_0}^{a_1},\\
F2 &= \left[(a-rcos\theta)\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)\right.\\
&\qquad+(z-l)\,arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)\\
&\qquad\left.-\frac{z-l}{|z-l|}rsin\theta\,arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{r|sin\theta|R}\right)\right]_{a_0}^{a_1}.
\end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\begin{aligned}
a_\theta(r,z) &= -\frac{\mu J}{2\pi}\left[\left[\frac{1}{2}\int_0^\pi (a^2\,cos\theta\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)d\theta\right.\right.\\
&\qquad-\frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\,cos^3\theta\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)d\theta\\
&\qquad+(z-l)\int_0^\pi rcos^2\theta\,arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)d\theta\\
&\qquad+\frac{z-l}{2}\int_0^\pi cos\theta\,R\,d\theta-\frac{z-l}{4|z-l|}r^2\int_0^\pi cos\theta\,sin^2\theta\,ln\left(\frac{R-|z-l|}{R+|z-l|}\right)d\theta\\
&\qquad\left.\left.-\frac{z-l}{|z-l|}r^2\int_0^\pi cos^2\theta\,sin\theta\,arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{r|sin\theta|R}\right)d\theta\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\right]_{a_0}^{a_1}.
\end{aligned}$$

Nous avons déjà montré que (cf. (60) et (43)) :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi a\,cos\theta\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)d\theta &= (z-l)\left(-\frac{ad_1}{2r}E(m)+\frac{2a^2+2r^2+(z-l)^2}{2rad_1}K(m)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{(a-r)^2}{2rad_1}\Pi\left(\beta_0,m\right)\right),\\
\int_0^\pi r\,cos^2\theta\,arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)d\theta &= \frac{r}{2}\left(H(r,z)+\left(\frac{z-l}{r}\right)^2\int_0^\pi\frac{a\,d\theta}{R}\right.\\
&\qquad-\frac{\rho^2}{r}\int_0^\pi\frac{cos\theta\,d\theta}{R}+\int_0^\pi\frac{a\,cos^2\theta\,d\theta}{R}\\
&\qquad\left.-(z-l)^2\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\int_0^\pi\frac{(a-rcos\theta)\,d\theta}{(r^2sin^2\theta+(z-l)^2)R}\right),
\end{aligned}$$

avec

$$H(r,z) = \int_0^\pi arcsinh\left(\frac{a - rcos\theta}{\sqrt{r^2 sin^2\theta + z^2}}\right) d\theta.$$

Considérons les autres intégrales intervenant dans l'expression de a_θ.
On obtient facilement :

$$\int_0^\pi cos\theta\, R\, d\theta \;=\; -\int_0^\pi \frac{ar\, d\theta}{R} + \int_0^\pi \frac{ar\, cos^2\theta\, d\theta}{R},$$

Par intégration par parties, il vient

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi r^2\, cos^3\theta\, arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2 - 2arcos\theta + r^2}}\right) d\theta \;=\; & \int_0^\pi r^2\, cos\theta\, arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2 - 2arcos\theta + r^2}}\right) d\theta \\
& + \frac{1}{3}\int_0^\pi r^2\, sin^3\theta\, \frac{\partial}{\partial\theta} arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2 - 2arcos\theta + r^2}}\right) d\theta \\
= \; & \int_0^\pi r^2\, cos^2\theta\, arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2 - 2arcos\theta + r^2}}\right) d\theta \\
& - \frac{z-l}{3}\int_0^\pi \frac{ar^3 sin^4\theta}{(a^2 - 2arcos\theta + r^2)\, R}\, d\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi r^2\, cos\theta\, sin^2\theta\, ln\left(\frac{R - |z-l|}{R + |z-l|}\right) d\theta \;=\; & -\frac{1}{3}\int_0^\pi r^2\, sin^3\theta\, \frac{\partial}{\partial\theta} ln\left(\frac{R - |z-l|}{R + |z-l|}\right) d\theta \\
& - \frac{2\,|z-l|}{3}\int_0^\pi \frac{ar^3 sin^4\theta}{(a^2 - 2arcos\theta + r^2)\, R}\, d\theta.
\end{aligned}$$

Calculons le terme commun à ces deux expressions :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{sin^4\theta}{(a^2 - 2arcos\theta + r^2)\, R}\, d\theta \;=\; & \int_0^\pi \frac{sin^2\theta}{(a^2 - 2arcos\theta + r^2)\, R}\, d\theta + \frac{1}{2ar}\int_0^\pi \frac{sin^2\theta\, cos\theta}{R}\, d\theta \\
& - \frac{a^2 + r^2}{2ar}\int_0^\pi \frac{sin^2\theta cos\theta}{(a^2 - 2arcos\theta + r^2)\, R}\, d\theta \\
= \; & \int_0^\pi \frac{sin^2\theta}{(a^2 - 2arcos\theta + r^2)\, R}\, d\theta + \frac{1}{2ar}\int_0^\pi \frac{cos\theta}{R}\, d\theta \\
& - \frac{1}{2ar}\int_0^\pi \frac{cos^3\theta}{R}\, d\theta - \frac{a^2 + r^2}{2ar}\left(-\frac{1}{2ar}\int_0^\pi \frac{d\theta}{R} + \frac{1}{2ar}\int_0^\pi \frac{cos^2\theta}{R}\, d\theta\right. \\
& \left. + \frac{a^2 + r^2}{2ar}\int_0^\pi \frac{sin^2\theta}{(a^2 - 2arcos\theta + r^2)\, R}\, d\theta\right).
\end{aligned}$$

De même nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} cos^2\theta\, sin\theta\, arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{rsin\theta R}\right) d\theta &= \left[\frac{cos^3\theta}{3}\, arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{rsin\theta R}\right)\right]_0^{\pi} \\
&+\frac{1}{3}\int_0^{\pi} cos^3\theta\, \frac{\partial}{\partial\theta} arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{rsin\theta R}\right) d\theta \\
&= \left[-\frac{cos^3\theta}{3}\, arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{rsin\theta R}\right)\right]_0^{\pi}] \\
&+\frac{|z-l|}{3}\left(-\int_0^{\pi}\frac{cos^3\theta\, d\theta}{2R}\right. \\
&+\int_0^{\pi}\frac{(\rho^2-a\,r\,cos\theta)\,cos^3\theta\, d\theta}{(r^2sin^2\theta+(z-l)^2)R} \\
&+\left.\frac{r^2-a^2}{2}\int_0^{\pi}\frac{cos^3\theta\, d\theta}{(a^2-2arcos\theta+r^2)R}\right).
\end{aligned}$$

Calculons chacune des 3 intégrales intervenant dans cette dernière expression :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{cos^3\theta\, d\theta}{R} &= \int_0^{\pi}\frac{cos\theta\, d\theta}{R}-\int_0^{\pi}\frac{cos\theta\, sin^2\theta\, d\theta}{R} \\
&= \int_0^{\pi}\frac{cos\theta\, d\theta}{R}+\frac{1}{2ar}\int_0^{\pi} sin^2\theta\, R\, d\theta \\
&+\frac{a^2+r^2+(z-l)^2}{2ar}\left(-\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{R}+\int_0^{\pi}\frac{cos^2\theta\, d\theta}{R}\right).
\end{aligned}$$

Par intégration par parties, on montre que

$$\int_0^{\pi} sin^2\theta\, R\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} R\, d\theta + \int_0^{\pi}\frac{ar\, d\theta}{R}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{ar\, cos^3\theta d\theta}{R}.$$

D'où :

$$\int_0^{\pi}\frac{cos^3\theta\, d\theta}{R} = \int_0^{\pi}\frac{cos\theta\, d\theta}{R}+\frac{1}{6ar}\int_0^{\pi} R\, d\theta+\frac{(a^2+r^2+(z-l)^2)}{3ar}\left(-\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{R}+\int_0^{\pi}\frac{cos^2\theta\, d\theta}{R}\right).$$

De même pour la deuxième intégrale, il vient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\frac{(\rho^2-a\,r\,cos\theta)\,cos^3\theta\, d\theta}{(r^2sin^2\theta+(z-l)^2)R} &= -\frac{1}{r^2}\int_0^{\pi}\frac{(\rho^2-a\,r\,cos\theta)\,cos\theta\, d\theta}{R} \\
&+\frac{\rho^2}{r^2}\int_0^{\pi}\frac{(\rho^2-a\,r\,cos\theta)\,cos\theta\, d\theta}{(\rho^2-r^2cos^2\theta)R} \\
&= -\frac{\rho^2}{r^2}\int_0^{\pi}\frac{cos\theta\, d\theta}{R}+\frac{a}{r}\int_0^{\pi}\frac{cos^2\theta\, d\theta}{R} \\
&-\frac{\rho^2\, a}{r^3}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{R} \\
&+\frac{\rho^3}{2r^3}\left(\int_0^{\pi}\frac{(\rho-a)\, d\theta}{(\rho-rcos\theta)R}-\int_0^{\pi}\frac{(\rho+a)\, d\theta}{(\rho+rcos\theta)R}\right)
\end{aligned}$$

et pour la dernière intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{cos^3\theta\, d\theta}{(a^2-2arcos\theta+r^2)R} &= \int_0^\pi \frac{cos\theta\, d\theta}{(a^2-2arcos\theta+r^2)R} - \int_0^\pi \frac{cos\theta\, sin^2\theta\, d\theta}{(a^2-2arcos\theta+r^2)R} \\
&= +\frac{a^2+r^2}{2ar}\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a^2-2arcos\theta+r^2)R} \\
&\quad -\frac{1}{2ar}\int_0^\pi \frac{cos^2\theta\, d\theta}{R} \\
&\quad -\frac{a^2+r^2}{2ar}\int_0^\pi \frac{sin^2\, d\theta}{(a^2-2arcos\theta+r^2)R}.
\end{aligned}$$

Enfin on montre de manière analogue à (49) que :

$$\left[\frac{cos^3\theta}{3}\, arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{rsin\theta R}\right)\right]_0^\pi = \frac{\pi}{6}(1+sgn(a-r)). \tag{67}$$

Nous pouvons donc maintenant exprimer a_θ en termes d'intégrales elliptiques et de la fonction H. Soit :

$$\begin{aligned}
a_\theta(r,z) &= -\frac{\mu J}{2\pi}\Bigg[\Bigg[+\frac{(z-l)\,r}{2}H(r,z) - (z-l)\,\frac{a^2 d_1}{3r}E(m) + (z-l)\,\frac{3a^2-5r^2+4(z-l)^2}{6rd_1}K(m) \\
&\quad -(z-l)\rho\frac{2r^2-(z-l)^2}{6ard_1}\left(\frac{a-\rho}{r+\rho}\,\Pi(\beta_1,m) + \frac{a+\rho}{r-\rho}\,\Pi(\beta_2,m)\right) \\
&\quad -(z-l)\frac{a^2-3r^2}{6rd_1}\,\frac{a-r}{a+r}\,\Pi(\beta_0,m) \\
&\quad +r^2\frac{\pi}{6}(1+sgn(a-r))\frac{z-l}{|z-l|}\Bigg]_{a_0}^{a_1}\Bigg]_{h_0}^{h_1},
\end{aligned} \tag{68}$$

avec

$$\begin{aligned}
d_1^2 &= \left(1+\frac{r}{a}\right)^2 + \left(\frac{z-l}{a}\right)^2, \\
m^2 &= \frac{4r}{ad_1^2}, \\
\rho &= \sqrt{r^2+(z-l)^2}, \\
\beta_1 &= \frac{2r}{r+\rho}, \\
\beta_2 &= \frac{2r}{r-\rho}.
\end{aligned}$$

6.3.2 Distribution de Bitter

Pour une distribution de courant $J = \frac{I}{ha}$, a_θ est donné par :

$$a_\theta(r,z) = -\frac{\mu I}{2\pi h}\int_0^\pi \left[\int_{a_0}^{a_1} cos\theta\, arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)\, da\, d\theta\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}. \tag{69}$$

Dans le paragraphe précédent on a vu que :

$$\begin{aligned}
F2 &= \int_{a_0}^{a_1} arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)da, \\
F2 &= \Bigg[(a-rcos\theta)\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right) \\
&\qquad +(z-l)\,arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right) \\
&\qquad -\frac{z-l}{|z-l|}rsin\theta\,arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{r|sin\theta|R}\right)\Bigg]_{a_0}^{a_1}.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
a_\theta(r,z) &= -\frac{\mu I}{2\pi\,h}\Bigg[\Bigg[\int_0^\pi(a-rcos\theta)\,cos\theta\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)d\theta \\
&\qquad +(z-l)\int_0^\pi cos\theta\,arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)d\theta \\
&\qquad -\frac{z-l}{|z-l|}\,r\int_0^\pi cos\theta\,sin\theta\,arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{r|sin\theta|R}\right)d\theta\Bigg]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\Bigg]_{a_0}^{a_1}. \qquad (70)
\end{aligned}$$

Au cours des calculs de b_r pour le solénoïde épais avec une distribution de courant de type Bitter et de a_θ pour le solénoïde mince, nous avons montré que (cf. (60) et (53)) :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi a\,cos\theta\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)d\theta &= (z-l)\Bigg(-\frac{ad_1}{2r}E(m)+\frac{2a^2+2r^2+(z-l)^2}{2rad_1}K(m) \\
&\qquad +\frac{(a-r)^2}{2rad_1}\Pi\left(\beta_0,m\right)\Bigg), \\
\int_0^\pi cos\theta\,arcsinh\left(\frac{a-rcos\theta}{\sqrt{r^2sin^2\theta+(z-l)^2}}\right)d\theta &= -\frac{\rho^2}{r}\int_0^\pi\frac{d\theta}{R}+\int_0^\pi\frac{acos\theta\,d\theta}{R} \\
&\qquad +\frac{(z-l)^2}{2r}\left(-\int_0^\pi\frac{a-\rho}{\rho-rcos\theta}\frac{d\theta}{R}+\int_0^\pi\frac{a+\rho}{\rho+rcos\theta}\frac{d\theta}{R}\right), \\
&= \frac{a^2-r^2-(z-l)^2}{ard_1}K(m)-\frac{ad_1}{r}E(m) \\
&\qquad +\frac{(z-l)^2}{ard_1}\left(\frac{\rho-a}{\rho+r}\Pi(\beta_1,m)+\frac{\rho+a}{\rho-r}\Pi(\beta_2,m)\right).
\end{aligned}$$

Calculons maintenant :

$$F=\int_0^\pi rcos^2\theta\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)d\theta$$

En remarquant que $cos\,2\,\theta = 2cos^2\theta - 1$, il vient :

$$
\begin{aligned}
F &= -\frac{rH_1(r,z-l)}{2} + \int_0^\pi \frac{cos\,2\,\theta}{2}\,arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{a^2-2arcos\theta+r^2}}\right)d\theta,\\
&= -\frac{rH_1(r,z-l)}{2} - \frac{r(z-l)}{2}\int_0^\pi sin^2\theta\,\frac{a\,r\,cos\theta}{a^2-2arcos\theta+r^2}\,\frac{d\theta}{R},\\
&= -\frac{rH_1(r,z-l)}{2} - \frac{r(z-l)}{4}\int_0^\pi \frac{d\theta}{R} + \frac{r(z-l)}{4}\int_0^\pi cos^2\theta\,\frac{d\theta}{R}\\
&\quad + \frac{r(z-l)}{4}\int_0^\pi \frac{(a^2+r^2)\,sin^2\theta}{a^2-2arcos\theta+r^2}\,\frac{d\theta}{R},
\end{aligned}
$$

avec

$$H_1(r,z-l) = \int_0^\pi arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{r^2-2arcos\theta+a^2}}\right)d\theta.$$

Enfin posons

$$f(r,z,\theta) = \left(arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{rsin\theta R}\right)\right).$$

Nous avons après intégration par parties :

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{z-l}{|z-l|}\,rcos\theta\,sin\theta\,f(r,z,\theta)\,d\theta &= \left[-\frac{z-l}{2\,|z-l|}\,rcos^2\theta\,f(r,z,\theta)\right]_0^\pi,\\
&\quad + \int_0^\pi \frac{z-l}{2\,|z-l|}\,rcos^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(arctan\left(\frac{(a-rcos\theta)|z-l|}{rsin\theta R}\right)\right)d\theta.
\end{aligned}
$$

La valeur de $\left[-\frac{z-l}{2\,|z-l|}\,rcos^2\theta\,f(r,z,\theta)\right]_0^\pi$ s'obtient facilement en considérant la limite de $f(r,z,\theta)$ pour $\theta=\pi$ et $\theta=0$ comme nous l'avons fait dans &5.2 (cf. (49)). Soit :

$$\left[-\frac{z-l}{2|z-l|}\,rcos^2\theta\frac{\partial}{\partial\theta}f(r,z,\theta)\right]_0^\pi = -r\frac{\pi}{4}(1-sgn(a-r))\frac{z-l}{|z-l|}. \tag{71}$$

D'autre part, on a vu que :

$$\frac{\partial f(r,z,\theta)}{\partial\theta} = \frac{|z-l|}{R}\left[-\frac{1}{2} + \frac{\rho^2}{r^2sin^2\theta+(z-l)^2} - \frac{arcos\theta}{r^2sin^2\theta+(z-l)^2} + \frac{r^2-a^2}{2(a^2-2arcos\theta+r^2)}\right].$$

D'où :

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{z-l}{2\,|z-l|}\,rcos^2\theta\frac{\partial f(r,z,\theta)}{\partial\theta} &= r(z-l)\left(-\frac{1}{4}\int_0^\pi\frac{cos^2\theta}{R} + \frac{\rho^2}{2}\int_0^\pi\frac{cos^2\theta\,d\theta}{(r^2sin^2\theta+(z-l)^2)R}\right.\\
&\quad\left. -\frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{arcos^3\theta\,d\theta}{(r^2sin^2\theta+(z-l)^2)R} + \frac{r^2-a^2}{4}\int_0^\pi\frac{cos^2\theta\,d\theta}{(a^2-2arcos\theta+r^2)\,R}\right),
\end{aligned}
$$

Soit encore après avoir simplifier et regrouper les différents termes :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{z-l}{2\,|z-l|}\, rcos^2\theta \frac{\partial f(r,z,\theta)}{\partial\theta} \quad = \quad & r(z-l)\left(-\frac{1}{4}\int_0^\pi \frac{cos^2\,\theta}{R}\right. \\
& +\frac{\rho^2}{4r^2}\left(+\int_0^\pi \frac{\rho+a}{\rho+rcos\theta}\,\frac{d\theta}{R}+\int_0^\pi \frac{\rho-a}{\rho-rcos\theta}\,\frac{d\theta}{R}\right) \\
& -\frac{\rho^2}{2r^2}\int_0^\pi \frac{d\theta}{R} \\
& +\frac{1}{2r^2}\int_0^\pi \frac{arcos\theta\, d\theta}{R} \\
& +\frac{r^2-a^2}{4}\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a^2-2arcos\theta+r^2)\,R} \\
& \left.-\frac{r^2-a^2}{4}\int_0^\pi \frac{sin^2\theta\, d\theta}{(a^2-2arcos\theta+r^2)\,R}\right),
\end{aligned}$$

Nous sommes donc maintenant en mesure d'exprimer complétement a_θ en termes d'intégrales elliptiques et de la fonction H_1. Soit :

$$\begin{aligned}
a_\theta(r,z) \quad = \quad & -\frac{\mu I}{2\pi\, h}\left[\left[-\frac{r}{2}H_1(r,z-l)-(z-l)\,\frac{3ad_1}{4r}E(m)-(z-l)\,\frac{-4a^2-2r^2+(z-l)^2}{4ard_1}K(m)\right.\right. \\
& -(z-l)\frac{r^2-(z-l)^2}{2ar}\left(\frac{a-\rho}{r+\rho}\,\Pi(\beta_1,m)+\frac{a+\rho}{r-\rho}\,\Pi(\beta_2,m)\right) \\
& -(z-l)\frac{a^2-3r^2}{4ard_1}\,\frac{a-r}{a+r}\,\Pi(\beta_0,m) \\
& \left.\left.+r\frac{\pi}{4}(1-sgn(a-r))\frac{z-l}{|z-l|}\right]_{a_0}^{a_1}\right]_{h_0}^{h_1}, \qquad (72)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
d_1^2 &= \left(1+\frac{r}{a}\right)^2+\left(\frac{z-l}{a}\right)^2, \\
m^2 &= \frac{4r}{ad_1^2}, \\
\rho &= \sqrt{r^2+(z-l)^2}, \\
\beta_1 &= \frac{2r}{r+\rho}, \\
\beta_2 &= \frac{2r}{r-\rho},
\end{aligned}$$

et

$$H_1(r,z-l)=\int_0^\pi arcsinh\left(\frac{z-l}{\sqrt{r^2-2arcos\theta+a^2}}\right)\,d\theta.$$

Références

[1] A. Hervé. Integration of the magnetic componetns of circular thick coils and disk coils. *Proc. of fifteenth int. conf. on Magnet Technology*, Part two :1262–1270, 1997.

[2] C. Snow. *J. Res. Natl. Bur. Std.*, 22(RP 1178) :239, 1939.

[3] G. V. Brown and L. Flax. Superposition of semi-infinite soleinoids for calculating magnetic fields of thick solenoids. *J. Applied Physics*, 35(6) :1764–1767, 1964.

[4] J. C. Maxwell. *Treatise on Electricity and Magnetism.* Clarendon Press, Oxford, 1873.

[5] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formula, Graphs, and Mathematical Tables.* Dover Publications, inc., New York, 1964.

A Intégrales elliptiques complètes

A.1 Intégrale elliptique de première espèce

L'intégrale elliptique de première espèce est définie par :

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2\, sin^2\theta}}. \tag{73}$$

Remarquons encore que k peut se mettre sous la forme suivante :

$$K(m) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-m^2\,t^2}}, \tag{74}$$

en effectuant le changement de variable $t = sin\theta$.

A.2 Intégrale elliptique de deuxième espèce

L'intégrale elliptique de deuxième espèce est définie par :

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - m^2\, sin^2\theta}\, d\theta = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-m^2\,t^2}{1-t^2}}\, dt. \tag{75}$$

Il est intéressant de noter que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(m^2 t\sqrt{\frac{1-m^2\,t^2}{1-t^2}}\right) &= m^2\frac{\sqrt{1-t^2}}{(1-m^2\,t^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-m^2t^2)}}, \\ &= \sqrt{\frac{1-m^2\,t^2}{1-t^2}} + \frac{m^2-1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}(1-m^2t^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Après intégration, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}(1-m^2t^2)^{\frac{3}{2}}}\, dt = \frac{1}{1-m^2}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-m^2\,t^2}{1-t^2}}\, dt.$$

On en déduit donc la relation suivante :

$$E(m) = (1-m^2)\int_0^1 \frac{1}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}(1-m^2t^2)^{\frac{3}{2}}}\, dt.$$

A.3 Intégrale elliptique de troisième espèce

L'intégrale elliptique de troisième espèce est définie par :

$$\Pi(\beta, m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1-\beta\, sin^2\theta)\sqrt{1-m^2\, sin^2\theta}} = \int_0^1 \frac{dt}{(1-\beta\, t^2)\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-m^2\,t^2}}. \tag{76}$$